近畿大学
医学部

(前期)　平成22年度入学試験　数学 (問題用紙)

◎ 問題は3問です。解答はすべて解答用紙に記入すること。

1　座標平面に，原点を中心とし半径が1の円があり，その円周上に3点

$$A(1,0),\quad B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad C\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

をとる。円周上の孤BC（点Aを含まないほうの弧BC）を考え，孤BC上を点Bから点Cまで動く点をPとする。$\angle PAB=\theta$ とし，点Pと3点A,B,Cを結ぶ3つの線分の長さを，それぞれ，PA, PB, PC とするとき

(1)　PA, PB, PC は

$$PA=\boxed{ア}\sin\left(\theta+\boxed{イ}\right),\quad PB=\boxed{ウ}\sin\theta,\quad PC=\boxed{エ}\sin\left(-\theta+\boxed{オ}\right)$$

と表すことができる。

(2)　$PA+PB+PC=\boxed{カ}\sin\left(\theta+\boxed{キ}\right)$　と表すことができる。

PA+PB+PC の値は $\theta=\boxed{ク}$ のとき最大値 $\boxed{ケ}$ になる。

(3)　$PA^2+PB^2+PC^2=\boxed{コ}$　である。

2　座標平面の3点 A(0,0), B(3,0), C(1,3) に対して

- 線分BCを $1:k$ に内分する点をD　(kは正の実数)
- 2点A, Dを通る直線をℓ
- 点Cを中心とし直線ℓに接する円をS
- 円Sと直線ℓの接点をP

とする。

(1)　点Dの座標，直線ℓの方程式，円Sの半径rの値を，それぞれ，kを用いて表せ。

(2)　kがすべての正の値をとって変化するとき，円Sの半径rがとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　kがすべての正の値をとって変化するとき，点Pが描く軌跡の方程式とその範囲を求めよ。

(4)　点Pが線分BC上にあるとき，kの値と点Pの座標を求めよ。

3　3つの条件

①　$0<x<1$　　②　$\dfrac{1}{x}$ の小数部分が $\dfrac{x}{2}$ に等しい　　③　$\dfrac{1}{x}$ の整数部分がn　(nは自然数)

をみたす実数xをx_nとして，数列 $\{x_n\}$ を作るとき

(1)　初項 x_1 を求めよ。また，一般項 x_n を求めよ。

(2)　$x_n<\dfrac{1}{n}$　がなりたつことを示せ。

(3)　数列 $\{x_n\}$ の第1項から第n項までの和S_nに対して　$S_n<1+\log_2 n$　がなりたつことを示せ。

ただし，$\boxed{任意の自然数nに対して\ \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\leqq 1+\log_2 n\ がなりたつ}$ ……(*)

を利用せよ。

(4)　(*)を，以下のようにして証明せよ。(nは自然数)

(i)　二項定理を利用して　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geqq 2$　を示し，$\log_2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\geqq\dfrac{1}{n}$　を示せ。

(ii)　(*)がなりたつことを，数学的帰納法を用いて示せ。