

次の[ ]に適切な解を入れよ。複数の解がある場合は、コンマで区切ってすべての解を記入すること。

1.  $\theta$ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ かつ $\cos 2\theta = \sin 3\theta$ の関係式を満たすとき、 $\theta = [ \text{①} ]$ であり、 $\sin \theta = [ \text{②} ]$ となる。

2. 関数 $f(x) = \cos^2(2x - 3\pi)$ の周期は[ ① ]であり、関数 $g(x) = \cos^3(3x + \pi)$ の周期は[ ② ]である。

3. 実数 $a, b$ に対して $a \star b$ を次のように定義するとき、

$$a^2 > 2b \text{ のとき } a \star b = 2a + 2b$$

$$a^2 \leq 2b \text{ のとき } a \star b = 2a^2$$

(a)  $1 \star 3 = [ \text{①} ]$ となり、 $3 \star 1 = [ \text{②} ]$ となる。また、方程式 $(x-1) \star x = 0$ の解は $x = [ \text{③} ]$ である。

(b) 座標平面上で2つのグラフ $y = x \star 2$ と $y = 4x + k$ の交点が、1つであるための $k$ の条件は[ ④ ]、2つであるための $k$ の条件は[ ⑤ ]、3つであるための $k$ の条件は[ ⑥ ]である。ただし、 $k$ は実数とする。

4.  $x$ が実数であるとき、関数 $f(x) = 2x\sqrt{2-x^2}$ の定義域は[ ① ]であり、 $f(x)$ は $x = [ \text{②} ]$ のとき最小値[ ③ ]をとり、 $x = [ \text{④} ]$ のとき最大値[ ⑤ ]をとる。座標平面上的 $y = f(x)$ のグラフと $x$ 軸とで囲まれる部分の面積は[ ⑥ ]であり、このグラフを $y$ 軸の回りに回転させてできる立体の体積は[ ⑦ ]である。

5. 次の積分の値を求めると、

$$\int_1^3 \frac{\log_e x}{x^2} dx = [ \text{①} ], \int_1^3 \frac{\log_e x}{x^3} dx = [ \text{②} ], \int_4^5 \frac{3x-7}{x^3-6x^2+11x-6} dx = [ \text{③} ]$$

となる。

6.  $\cos \theta + i \sin \theta$  が方程式  $x^3 - 2x^2 + ax - 3 = 0$  の解の1つであるとき、 $a = [ \text{①} ]$ 、 $\theta = [ \text{②} ]$ である。このとき、方程式の3つの解は[ ③ ]、[ ④ ]、[ ⑤ ]となる。

ただし、 $i$ は虚数単位であり、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

7. 男4人で、120日かかる仕事を、女6人ですると100日かかるものとする。この仕事を男2人と女3人ですると[ ① ]日かかる。また、この仕事を40日は男3人でやり、残りを男2人と女5人ですると、最初の取りかかりから終了まで[ ② ]日かかる。なお、男女それぞれにおいて、1日の仕事量に個人差はなく、総仕事量は単純に加算されるものとする。

8. サイコロをふって、出た目が偶数であれば2点加算され、奇数であれば1点差し引かれるゲームを考える。持ち点0から始めたとき、3回目、5回目のゲームを終えた時点で持ち点が0以上である確率は、それぞれ[ ① ]、[ ② ]である。

また、9回目を終えた時点での持ち点の期待値は[ ③ ]である。