一般入試　必須科目　数学（60 分）

Ⅰ　座標平面上の点(x, y)に対し，

$$y = 2\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + 1 \quad \cdots\cdots①$$

が成立している．

(a)　①の定義域は $\boxed{\text{ア}} \leqq x \leqq \boxed{\text{イ}}$，値域は $\boxed{\text{ウ}} \leqq y \leqq \boxed{\text{エ}}$ である．

(b)　2 点 A，B を$\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{キ}}}\right)$にとると，①のグラフ上の任意の点 P に対し，常に $\mathrm{PA} + \mathrm{PB} = \boxed{\text{ク}}$ が成り立つ．

(c)　直線 $y = x + k$ が①のグラフと共有点を持つような定数 k の範囲は

$$\boxed{\text{ケコ}} \leqq k \leqq \boxed{\text{サシ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

(d)　不等式 $x - 1 \leqq 2\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + 1$ の解は

$$\boxed{\text{セ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ソ}} + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．

Ⅱ　動点P，Q，Rは，時刻$t=0$においてすべて点A(3，0)にあり，原点O(0，0)を中心とする半径3の円周上を反時計まわりに移動する．時刻tにおいて$\angle \mathrm{AOP}=t$，$\angle \mathrm{AOQ}=2t$，$\angle \mathrm{AOR}=3t$である．以下，tは$0<t<\pi$を満たすものとする．

(a)　時刻tにおいて，三角形PQRの面積Sは，

$$S=\boxed{\text{ア}}\sin t-\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\sin\left(\boxed{\text{エ}}\,t\right)$$

と表わせる．面積Sは$t=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$のとき最大値$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$をとる．

(b)　点Rから直線PQに下ろした垂線の足をHとする．時刻tにおいて，行列

$\begin{pmatrix} \cos\frac{3}{2}t & \sin\frac{3}{2}t \\ -\sin\frac{3}{2}t & \cos\frac{3}{2}t \end{pmatrix}$で表わされる1次変換により，点Hは

$$\left(3\cos\left(\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}t\right),\ 3\sin\left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}t\right)\right)$$

に移動する．OH^2は$\cos t=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$を満たす時刻$t$において最大値

$\boxed{\text{チ}}+\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ をとる．

(c)　時刻tの変化にともない，線分PRの中点が描く軌跡をCとする．点Oを極とし，半直線$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$($\alpha\geqq 0$)を始線としたとき，曲線$C$の極方程式は，極座標$(r,\ \theta)$を用いて

$$r=\boxed{\text{ト}}\cos\left(\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\theta\right)$$

と表わされる．

Ⅲ　$x \geqq 1$ の実数 x に対し，方程式

$$f(x) = (\log_e x)^2 - \int_1^e \frac{f(t)}{t}\,dt$$

を満たす関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(a)　$\displaystyle\int_1^e \frac{(\log_e t)^2}{t}\,dt = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であることに注意すると，

$$f(x) = (\log_e x)^2 - \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる．また，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の y 座標の値は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

(b)　点 $(e,\ f(e))$ における $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{キ}}\ e^{\boxed{\text{クケ}}}x - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である．この接線と曲線 $y = f(x)$ および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積は

$$\boxed{\text{シス}} + \frac{1}{e}\left(\boxed{\text{セ}} + e^{\boxed{\text{ソ}}}\right)$$

である．

Ⅳ $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ の解答は対応する解答群の中から最も適当なものを1つ選べ.

条件 $a_1=0$，$a_2=0$ と漸化式

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=2^n\log_2\frac{(n+1)^2}{n} \qquad \cdots\cdots(*)$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列の一般項を，以下の要領で求めてみよう.

(a) 漸化式$(*)$より，ベクトル $\vec{b}_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}$ に対して

$$\vec{b}_{n+1}=A\vec{b}_n+\begin{pmatrix}2^n\log_2\dfrac{(n+1)^2}{n}\\ 0\end{pmatrix}$$

が成立する．ただし，行列 A は $A=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イウ}}\\ \boxed{\text{エ}} & 0\end{pmatrix}$ である.

この式の両辺に，A の逆行列 A^{-1} を左から n 回かけると

$$(A^{-1})^n\vec{b}_{n+1}=(A^{-1})^{n-1}\vec{b}_n+(A^{-1})^n\begin{pmatrix}2^n\log_2\dfrac{(n+1)^2}{n}\\ 0\end{pmatrix}$$

となり，$(A^{-1})^{n-1}\vec{b}_n$ の階差数列がわかる．これより，2以上の整数 n に対し，

$$(A^{-1})^{n-1}\vec{b}_n=\vec{b}_1+\sum_{k=1}^{\boxed{\text{オ}}}(A^{-1})^k\begin{pmatrix}2^k\log_2\dfrac{(k+1)^2}{k}\\ 0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(**)$$

を得る.

(b) $(**)$式の右辺第一項は $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}\boxed{\text{カ}}\\ \boxed{\text{キ}}\end{pmatrix}$ であり，$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}}\\ \boxed{\text{コサ}} & \boxed{\text{シ}}\end{pmatrix}$

は行列 $P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ を用いて

$$A^{-1}=P\begin{pmatrix}\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} & 0\\ 0 & \boxed{\text{ソ}}\end{pmatrix}P^{-1}$$

と表されるので，$(**)$式右辺の和の項について，次式が成立する.

$$\sum_{k=1}^{\boxed{\text{オ}}}(A^{-1})^k\begin{pmatrix}2^k\log_2\dfrac{(k+1)^2}{k}\\ 0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\log_2\boxed{\text{タ}}\\ -2^n\log_2\boxed{\text{チ}}\end{pmatrix}$$

(c) (b)の結果と，行列 A が同じ P を用いて

$$A = P\begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{テ}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表わされることに注意すると，(＊＊)式の両辺に行列 A を左から $(n-1)$ 回かけて得られる $\vec{b}_n$ から，一般項 a_n は

$$a_n = 2^{\boxed{\text{ト}}}\log_2 \boxed{\text{ナ}}$$

$(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ となる.

$\boxed{\text{オ}}$ ，$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $1-n$

⑤ $-n$　⑥ $-n-1$　⑦ $\dfrac{n(n+1)}{2}$　⑧ n^2-1

⑨ $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\boxed{\text{タ}}$ ，$\boxed{\text{チ}}$ ，$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

① $n-1$　② n　③ $\dfrac{n+1}{n}$　④ $\dfrac{4n-6}{n}$

⑤ n^2-4n+5　⑥ $(n-1)!$　⑦ $n!$　⑧ $n!-1$

⑨ $(n-1)\times n!$　⓪ $n\times n!$