令和３年度 入学試験問題

数学（前期）

試験時間	９０分
問題冊子	１～８頁

注意事項

1. 指示があるまで問題冊子は開かないこと。
2. 問題冊子および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. スマートフォン等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題冊子および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題冊子の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題冊子および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題冊子は持ち帰ること。

受験番号		氏名	

［Ⅰ］ 3 枚の硬貨 X，Y，Z を同時に投げて，表裏を調べるという試行 T を繰り返し行う。座標空間内の動点 P は定点 A $(a,\ b,\ c)$ から出発し，硬貨の表裏に応じて，次の規則にしたがって移動する。

［規則 1］ X が表の場合は x 軸方向に $+1$，裏の場合は x 軸方向に -1 だけ平行移動する。

［規則 2］ Y が表の場合は y 軸方向に $+1$，裏の場合は y 軸方向に -1 だけ平行移動する。

［規則 3］ Z が表の場合は z 軸方向に $+1$，裏の場合は z 軸方向に -1 だけ平行移動する。

このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1 はじめに，試行 T を続けて 6 回行ったところ，X，Y，Z が表となった回数はそれぞれ 2，3，4 であり，このとき，P は原点にあったという。a，b，c の値をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問 2 次に，動点 P を問 1 で定まった定点 A に戻してから，試行 T を続けて 5 回行った。このとき，P が次の集合に属する確率をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。ただし，有理数は既約分数で表すこと。

(1) $\{(x,\ y,\ z)\,|\,z=-1\}$

(2) $\{(x,\ y,\ z)\,|\,y \leqq 4,\ z=-1\}$

(3) $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x>2,\ y+z=2\}$

（計　算　用　紙）

[II] a を実数の定数とする。O を原点とする座標平面において，曲線 $C : y = |x|(6-x)+x$ と直線 $L : y = 5ax + a^4$ の共有点の個数を $N(a)$ とおくとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　直線 L が原点を通るような定数 a の値をすべて求めよ。答えのみでよい。

問 2　曲線 C 上の点 $(1,\ 6)$ における C の接線の方程式を求めよ。答えのみでよい。

問 3　$N(a)$ を求めよ。

（計　算　用　紙）

［III］ O を原点とする座標平面における放物線 $C : y^2 = 4px\ (p > 0)$ に対して，C の焦点を F，C 上の異なる 2 点 A $\left(\dfrac{\alpha^2}{4p}, \alpha\right)$，B $\left(\dfrac{\beta^2}{4p}, \beta\right)$ (ただし，$\alpha < 0 < \beta$) における 2 接線の交点を P とする。C と 2 直線 AF，BF で囲まれる部分の面積を S，C と 2 直線 AP，BP で囲まれる部分の面積を T とするとき，以下の各問いに答えよ。

問 1 S を α，β，p を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2 T を α，β，p を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3 $S = T$ が成り立つとき，$-\dfrac{\beta}{\alpha}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

（計　算　用　紙）

[IV] a, bを正の定数とする。xy平面上の2つの曲線$C_1 : y = e^{x^2}$ $(x > 0)$, $C_2 : y = a \log x + b$ $(x > 0)$ に対して，C_1 と C_2 はただ一つの共有点 $(\alpha,\ e^{\alpha^2})$ $(0 < \alpha < 1)$をもつとする。また，曲線 C_1，曲線 C_2，直線 $x = \alpha^{\frac{3}{2}}$ で囲まれた図形を y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を $V(\alpha)$ とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

問1 a，b を α を用いて表せ。答えのみでよい。

問2 $V(\alpha)$ を α のみを用いて表せ。

問3 $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-\frac{t^3}{6} \leqq e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2} \leqq 0$$

問4 極限 $\displaystyle\lim_{\alpha \to +0} \frac{V(\alpha)}{\alpha^c}$ が存在し，かつその極限値が正となるような正の定数 c の値を求めよ。また，そのときの極限値を答えよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ であることを証明なしに用いてよい。

（計　算　用　紙）