

平成 22 年度 入学 試験 問題 (前期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

数 学 (前 期)

[1] すべての実数で微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ とそれぞれの導関数 $f'(x)$, $g'(x)$ が関係式

$$f'(x) = g(x),$$

$$g'(x) = -f(x)$$

をみたすとする。

(1) $F(x) = f(x) \cos x - g(x) \sin x,$

$$G(x) = f(x) \sin x + g(x) \cos x$$

で定義された関数 $F(x)$, $G(x)$ に対して、それぞれの導関数 $F'(x)$, $G'(x)$ を計算せよ。

(2) $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ のとき、 $f(x)$, $g(x)$ はどのような関数か。

[2] 自然数 n に対して次のようにおく。

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n,$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$$

(1) $n \geq 2$ のとき、 $a_n < a_{n-1}$, $b_n > b_{n-1}$ を示せ。

不等式 $1.09 < \log 3 < 1.1$ を用いて、(2), (3) に答えよ。

(2) $n \geq 2$ のとき、 $b_n > 0.4$ を示せ。

(3) $n \geq 3$ のとき、 $0.4 < a_n < 0.75$ を示せ。

[3] 空間の原点を $O(0, 0, 0)$ とする。3点 $A(2, 2, 3)$, $B(-1, 4, 2)$, $C(2, -4, -3)$ を通る平面を α とする。

(1) 空間の点 P が平面 α の上にあるためには、実数 s, t が存在して

$$\vec{OP} = s \vec{OA} + t \vec{OB} + (1 - s - t) \vec{OC}$$

となることが必要十分であることを示せ。

(2) 平面 α が x 軸, y 軸, z 軸と交わる点を K, L, M とする。この3点の座標を求めよ。

[4] すべての実数で $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ をもつ関数として、 $g(x) = \int_{-1}^1 f'(t) f(x-t) dt$ とおく。一般に関数 $h(x)$ において、常に $h(-x) = h(x)$ が成り立つとき $h(x)$ は偶関数、常に $h(-x) = -h(x)$ が成り立つとき $h(x)$ は奇関数であるという。

(1) $f(x)$ が偶関数ならば $f'(x)$ は奇関数、 $f(x)$ が奇関数ならば $f'(x)$ は偶関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ が偶関数または奇関数であるとき、 $g(x)$ は奇関数であることを示せ。

(3) $f(x) = x^n$ (n は自然数) のとき $g(x)$ は整式である。その $g(x)$ の0でない最高次の項を求めよ。

[5] 1, 2, 3 の目がそれぞれ2面ずつに書かれたさいころがある。数直線上の点 x (x は整数) に置かれた石を次のような操作 A で別の点に移動させる。

点 x に置かれた石に対する操作 A : 上のさいころを投げて出た目を Z ($1 \leq Z \leq 3$) とする。

$x \geq 0$ ならば石を点 $(x - Z)$ に移動させ、 $x < 0$ ならば点 $(x + Z)$ に移動させる。

始めに石を数直線の原点 O に置く。1回目の操作 A で石が移動した点を X_1 とする。これを繰り返し、点 X_{n-1} に置かれた石に対して n 回目の操作 A を行って石が移動した点を X_n とする。

(1) 事象 $X_n = 0$ が起きる確率を p_n とおく ($n \geq 1$)。数列 $\{p_n\}$ は、初項 $p_1 = 0$ と漸化式 $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$ ($n \geq 1$) をみたすことを示せ。

(2) (1)の初項と漸化式で定められる数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 事象 $X_n = -3$ が起きる確率を q_n とおく ($n \geq 1$)。 q_n を n を用いて表せ。

数 学 (前 期)
(その1)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

[1]

数 学 (前 期)

(その2)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

[2]

数 学 (前 期)

(その3)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

[3]

数 学 (前 期)

(その4)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

[4]

数 学 (前 期)

(その5)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

受 験 番 号

**数 学
(前 期)**

下の線より上には解答を記入しないこと

[5]

1	
2	
3	
4	
5	
計	