令和２年度

９時００分～１０時３０分

# 数　学

| | |
|---|---|
| 問　題　冊　子 | ３　～　９　頁 |
| 解　答　用　紙 | １　頁 |

## 注　意　事　項

１．試験開始の合図［チャイム］があるまで、この注意をよく読むこと。
２．試験開始の合図［チャイム］があるまで、問題冊子ならびに解答用紙は開かないこと。
３．試験開始の合図［チャイム］の後に問題冊子ならびに解答用紙の全ページの所定の欄に受験番号と氏名を記入すること。
４．解答はかならず定められた解答用紙を用い、それぞれ定められた位置に問題の指示に従って記入すること。また、解答用紙に解答以外のことを書かないこと。
５．解答はすべて黒鉛筆を用いてはっきりと読みやすく書くこと。
６．問題冊子の余白および裏面を計算に利用してもよい。
７．質問は文字が不鮮明なときに限り受け付ける。
８．問題冊子に、落丁や乱丁があるときは手を挙げて交換を求めること。
９．試験開始６０分以内および試験終了前１０分間は、退場を認めない。
１０．試験終了の合図［チャイム］があったとき、ただちに筆記用具を置くこと。
１１．試験終了の合図［チャイム］の後は、問題冊子ならびに解答用紙はいずれも表紙を上にして、通路側から解答用紙、問題冊子の順に並べて置くこと。いっさい持ち帰ってはならない。
なお、途中退場の場合は、すべて裏返しにして置くこと。
１２．その他、監督者の指示に従うこと。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 受験番号 | | 氏　名 | |

$\boxed{1}$ 以下の設問 (1)〜(3) の $\boxed{ア}$ 〜 $\boxed{ク}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ.

(1) 2020 の約数は全部で $\boxed{ア}$ 個あり，それらの和は $\boxed{イ}$ である.

(2) 空間内に点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), D(1, 1, 1)がある. 3 点 A, B, C の定める平面と線分 OD との共有点を E とするとき，OE : ED を最も簡単な整数の比で表すと $\boxed{ウ}$ : $\boxed{エ}$ である.

(3) 曲線 $C : y = |2x^2 - 2x|$ と直線 $y = 2ax$ ($a$ は実数の定数) が異なる 3 つの共有点をもつとする. 共有点を $x$ 座標の小さい順に P, Q, R とするとき，P, Q, R の $x$ 座標はそれぞれ $\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$ である. 曲線 $C$ および線分 PQ で囲まれた部分と，曲線 $C$ および線分 QR で囲まれた部分の面積が等しくなるのは，$a = \boxed{ク}$ のときである.

**2** $z^5=1$ を満たす虚数(実数でない複素数)で偏角が最小のものを $z_1$ $(0 \leqq \arg z_1 < 2\pi)$,

$z^5=-1$ を満たす虚数で偏角が最小のものを $z_2$ $(0 \leqq \arg z_2 < 2\pi)$ とする.

以下の設問 (1), (4) の $\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ にあてはまる適切な数と設問(2), (3), (5) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ.

(1) $z_1$ を極形式で表すと $z_1 = \boxed{\text{ケ}}\left(\cos \boxed{\text{コ}} + i\sin \boxed{\text{コ}}\right)$

であり, $z_1 + \dfrac{1}{z_1} = \boxed{\text{サ}} \cos \boxed{\text{コ}}$ である.

(2) 次の①～⑤の式のうち正しいものをすべて選び, その番号を答えよ.

① $z_1^2 = z_2$　② $z_1^3 + z_2 = 0$　③ $z_1 = z_2^2$　④ $z_1^3 z_2^4 = 1$　⑤ $z_1^4 - z_2^3 = 0$

(3) 次の $\boxed{\text{a}}$, $\boxed{\text{b}}$ にあてはまる適切な2次方程式を下の①～⑥から選び, その番号を答えよ. ただし, 同じ番号を繰り返し選んでもよい.

$x_1 = z_1 + \dfrac{1}{z_1}$ とおく. $z_1^5 = 1$ であるから, $x_1$ は2次方程式 $\boxed{\text{a}}$ の解である.

$x_2 = z_2 + \dfrac{1}{z_2}$ とおくと, $x_2$ は2次方程式 $\boxed{\text{b}}$ の解である.

① $x^2+5x-1=0$　② $x^2+x-5=0$　③ $x^2-x-1=0$

④ $x^2-5x-1=0$　⑤ $x^2+x-1=0$　⑥ $x^2-x-5=0$

(4) 半径1の円に内接する正十角形の面積を $S$ とすると, $S = \dfrac{5}{4}\sqrt{\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}\sqrt{5}}$ である.

(5) (4)の $S$ の値の範囲について正しいものを次の①～⑥から選び, その番号を答えよ.
必要であれば $2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ を用いよ.

① $2.6 < S < 2.7$　② $2.7 < S < 2.8$　③ $2.8 < S < 2.9$

④ $2.9 < S < 3.0$　⑤ $3.0 < S < 3.1$　⑥ $3.1 < S < 3.2$

$\boxed{3}$ $a>0$ に対して $f(x)=a^x$，$a_1=a$ とし，漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

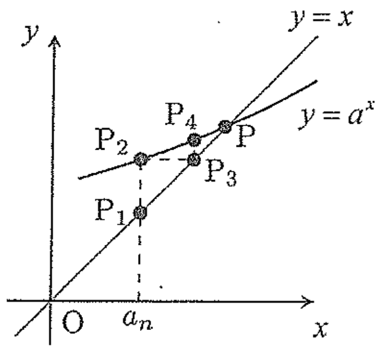
によって $a_n$ を定める．このとき，以下の設問(1)，(3)の $\boxed{セ}$ ～ $\boxed{ツ}$ に

あてはまる適切な数と設問(2)に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) $a=1$ ならば，$a_4=$ $\boxed{セ}$ であり，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ $\boxed{ソ}$ である．

$a=2$ ならば，$a_4=$ $\boxed{タ}$ であり，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ である．

(2) 曲線 $C$：$y=f(x)$ と直線 $\ell$：$y=x$ が
右図のように共有点 P をもつとする．
次の $\boxed{a}$ ～ $\boxed{d}$ にあてはまる適切なものを
下の①～⑤から選び，その番号を答えよ．
ただし，同じ番号を繰り返し選んでもよい．




$P_1(a_n,$ $\boxed{a}$ $)$ とすると $P_2($ $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ $)$，

$P_3($ $\boxed{b}$, $\boxed{c}$ $)$，$P_4($ $\boxed{c}$, $\boxed{d}$ $)$ となる．

① $a_{n-2}$ ② $a_{n-1}$ ③ $a_n$ ④ $a_{n+1}$ ⑤ $a_{n+2}$

(3) 曲線 $C$：$y=f(x)$ と直線 $\ell$：$y=x$ が接するとする．このとき，$a$ の値は $\boxed{チ}$ であり，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ $\boxed{ツ}$ である．

$\boxed{4}$ $p$ は素数とし，整数 $a$ を $p$ で割った余りを $\overline{a}$ で表す．

以下の設問(1)の $\boxed{テ}$，$\boxed{ト}$ にあてはまる適切な数と設問(2)～(5)に対する解答を

解答用紙の所定の欄に答えよ．

(1) $p=7$ とする．このとき $\overline{2020}=$ $\boxed{テ}$，$\overline{-100}=$ $\boxed{ト}$ である．

(2) $p=7$ とする．$a$，$b$ はそれぞれ $1\leqq a\leqq 6$，$1\leqq b\leqq 6$ を満たす整数とする．
下の表で，$a$ 行 $b$ 列の欄に $\overline{ab}$ を記入することによってすべての空欄を埋めるとき，
(a)，(b)，(c)に入る数の組み合わせを下の①～⑧から選び，その番号を答えよ．

| $a$ ＼ $b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | | | |
| 2 | 2 | 4 | | 1 | | 5 |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | | |
| 4 | | | | (a) | 6 | |
| 5 | | 3 | 1 | | (b) | (c) |
| 6 | | | 4 | 3 | | 1 |

① (a) 1 (b) 2 (c) 2　　⑤ (a) 2 (b) 2 (c) 2
② (a) 1 (b) 2 (c) 4　　⑥ (a) 2 (b) 2 (c) 4
③ (a) 1 (b) 4 (c) 2　　⑦ (a) 2 (b) 4 (c) 2
④ (a) 1 (b) 4 (c) 4　　⑧ (a) 2 (b) 4 (c) 4

(3) $p$ は素数とする．どんな整数 $a$，$b$ についても $\overline{ab}=\overline{\overline{a}\,\overline{b}}$ であることを示せ．

(4) $p$ は素数とする．$\overline{a}\neq 0$ ならば，ある整数 $b$ を選んで $\overline{ab}=1$ とできることを示せ．

(5) $a$ は整数で7の倍数ではないとする．このとき $a^6-1$ は7の倍数であることを示せ．

以　上