1行問題

1． a , b , c , d は正数で $a \geqq b \geqq c+d$ とするとき、$ad+bc$ と ab との大小を調べよ。

（1962　東北大）

2． $f(x)=\int_0^x (\cos t+\sin 2t)\,dt$ とするとき、関数 $y=f(x)$のグラフをえがけ。

（1962　大阪大）

3． $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき、$\int_0^x \cos t\,dt > 2\int_0^x \sin t\,dt$ を証明せよ。

（1963　京都大）

4． 曲線 $y=x^3$ の接線で、点 $\mathrm{P}(1, a)$ を通るものの本数を求めよ。

（1964　大阪大）

5． x に関する方程式 $\dfrac{x}{9}-\sin\dfrac{\pi x}{6}=0$ の最大の解に、最も近い整数を求めよ。

（1966　東京大）

6． $\dfrac{1}{1+x^2}$ ， $\dfrac{1}{2e^{|x|}-1}$ ， $\log\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ の大小を調べよ。ただし、$x \neq 0$ とする。

（1969　東北大）

7． 方程式 $x^3-2x+k=0$ は、k がどんな値をとるとき重解をもつか。

.　（1970　京都大）

8． 数学的帰納法によって、$\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n\,!$ を証明せよ。n は 2 以上の整数とする。

（1970　京都大）

9． $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{(\sqrt{n(n+1)}-n)^3}{n}-\dfrac{(\sqrt{n(n+1)}-(n+1))^3}{n+1}\right]$ を求めよ。

（1973　京都大）

10. $(x^3+\sqrt{2}x^2+\sqrt[3]{3}x+1)^{100}$ を展開したときの、x^{296} の係数を求めよ。

（1974　京都大）

11. $\log_2(1-x)+\log_4(x+4)\leqq 2$ を満たす x の範囲を求めよ。

（1975　大阪大）

12. $\log_8(2-x)+\log_{64}(x+1)\geqq\log_4 x$ を解け。

（1978　大阪大）

13. $\dfrac{2^n}{n}>n$ をみたす自然数 n の範囲を求めよ。

（1979　京都大）

14. $-4\leqq x\leqq 1$ の範囲で、$f(x)=\int_x^{x+1}|(t+1)(t+2)|\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

（1980　東北大）

15. $f(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x-2\sin 2x+\sin x$ の区間 $[\,0,\pi\,]$ における最大値・最小値を求めよ。

（1982　大阪大）

16. $0<x<1$ に対して、$\dfrac{1-x^3}{3}>\dfrac{1-x^2}{2}\sqrt{x}$ が成り立つことを証明せよ。

（1988　京都大）

17. 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nx\cos x\,dx$ は収束することを示し、その和を求めよ。

（1990　大阪大）

18. 点（$1,0$）を通り、曲線 $y=x^4-2x^2+1$ に接する直線の方程式をすべて求めよ。

（1990　大阪大）

19. $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$，$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

（1990　東京大）

20. 関数 $f(x)=x^3-2x^2-3x+4$ の、区間 $-\dfrac{7}{4}\leqq x\leqq 3$ での最大値と最小値を求めよ。

（1991　東京大）

21. $x\geqq 0$ のとき、つねに $x^3-ax+1\geqq 0$ が成り立つように実数 a の範囲を求めよ。

（1992　東北大）

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2}$ を計算せよ。

（1992　東北大）

23. 関数 $y=-x^4+x^3+x^2-x-|x^4+x^3-x^2-x|$ の増減を調べ、そのグラフをかけ。

（1994　東北大）

24. 任意の整数 n に対し、n^9-n^3 は 9 で割り切れることを示せ。

（2001　京都大）

25. 次の極限値を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\leftarrow\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin nx|\,dx$

（2001　京都大）

26. 円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

（2003　東京大）

27. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^{100}$ を求めよ。

（2003　京都大）

28. 多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか。

（2003　京都大）

29. 3 以上 9999 以下の奇数 a で、a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

（2005　東京大）

30. $\dfrac{2z+2i}{z+2i}=\bar{z}$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。（ただし、i は虚数単位とする。）

（2005　京都大）

31. $a^3-b^3=65$ を満たす整数の組（a, b）をすべて求めよ。

（2005　京都大）

32. さいころを n 個同時に投げるとき、出た目の数の和が $n+3$ になる確率を求めよ。

（2006　京都大）

33. 不等式　$1 \leqq ||x|-2|+||y|-2| \leqq 3$　の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

（2013　大阪大）

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。

（2014　大阪大）

35. 素数 p, q を用いて p^q+q^p と表される素数をすべて求めよ。

（2016　京都大）

n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ

（2018　京都大）

次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$

（2019　東京大）

49. i は虚数単位とする。$(1+i)^n+(1-i)^n>10^{10}$ をみたす最小の正の整数 n を求めよ。

（2019　京都大）

次の定積分の値を求めよ。 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

（2019　京都大）

定積分$\int_{-1}^{1}\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|dx$を求めよ。

（2021 京都大）

pが素数ならばp^4+14は素数でないことを示せ

（2021 京都大）

無限級数$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}$の和を求めよ。

（2021 京都大）

曲線$y=\log(1+\cos x)$の$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$の部分の長さを求めよ。

（2021 京都大）

解答

１．$ab\geqq bc+ad$

２．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{11\pi}{6}$	$\cdots$	2π

$f'(x)$	$\cdots$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\cdots$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

３．略

４．$a>1, a<0 \to 1$本　　$a=1, a=0 \to 2$本　　$0<a<1 \to 3$本

５．$x=5$

６．$\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) > \frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{2e^{|x|}-1}$

７．$k=\pm\frac{4\sqrt{6}}{9}$

８．略

９．$\frac{1}{4}$

１０．$15684900+9900\sqrt{2}+970200\sqrt[3]{3}+4950\sqrt[3]{9}$

１１．

１２．

１３．$n=1, n \geqq 5$

１４．