No7　放物線の興味ある性質

《例題》

放物線 $y=ax^2-bx+b$ と直線 $y=a^2x$ を考える。この放物線と直線は 2 交点 P , Q をもち、P と Q の x 座標の差の絶対値は1であるという。ただし $a>0$ とする。放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を d とする。

(1) d を a を用いて表せ。

(2) d を最大にする a と b の値を求めよ。

（1991 大阪大）

※１. 座標平面において 2 つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える。ただし s, t は実数で、$0<s$, $0<t<1$ をみたすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 P は、$P=\dfrac{s}{[\ ア\ ]}$ であり、、放物線 B の $x≧0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 Q は $Q=\dfrac{[\ イ\ ]t^3}{[\ ウ\ ]}$ である。A と B がただ 1 点を共有するとき、s と t の間には $s=\dfrac{t^{[\ エ\ ]}}{[\ オ\ ]-t^{[\ エ\ ]}}$ が成り立つ。よって、$\dfrac{Q}{P}$ を t を用いて表すと

$\dfrac{Q}{P}=[\ カキ\ ]t^3+[\ ク\ ]t$ である。よって $\dfrac{Q}{P}$ の最大値は $t=\dfrac{\sqrt{[\ ケ\ ]}}{[\ コ\ ]}$ のとき、$\dfrac{[\ サ\ ]\sqrt{[\ シ\ ]}}{[\ ス\ ]}$ である。

（2017 東京大）

２. 座標平面上の 2 つの放物線 $A: y=x^2$, $B: y=-x^2+px+q$ が点$(-1, 1)$で接している。ここで、p と q は実数である。

放物線 B が点$(-1, 1)$を通るから、$-p+q=[\ ア\ ]$である。また、放物線 A と放物線 B が点$(-1, 1)$で接しているので、$p^2+[\ イ\ ]q=0$ である。よって、$p=[\ ウエ\ ]$, $q=[\ オカ\ ]$である。

さらに、t を正の実数とし、放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$, y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とすると、放物線 C の式は

$y=-x^2+[\ キ\ ](t-[\ ク\ ])x-[\ ケ\ ]t^2+[\ コ\ ]t-[\ サ\ ]$と表される。

よって、放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$とすると、

$0<t<\dfrac{[\ シ\ ]}{[\ ス\ ]}$ のとき、$S(t)=\dfrac{[\ セ\ ]}{[\ ソ\ ]}\left(-t^2+\dfrac{[\ タ\ ]}{[\ チ\ ]}t\right)^{\frac{3}{2}}$ ，$t\geqq\dfrac{[\ シ\ ]}{[\ ス\ ]}$ のとき、$S(t)=0$ であり、$t>0$ における $S(t)$の最大値は $t=\dfrac{[\ ツ\ ]}{[\ テ\ ]}$ のとき、$\dfrac{[ト\ ナニ]}{[\ ヌネ\ ]}$ となる。

（2016 東京大）

３．a を正の実数, b と c を実数とし、2 点 P(− 1 , 3) ，Q(1 , 4)を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C とおくとき、$b=\dfrac{[\ ア\ ]}{[\ イ\ ]}$ であり、$c=\dfrac{[\ ウ\ ]}{[\ エ\ ]}-a$ と表すことができる。C 上の 2 点 P , Q における C の接線をそれぞれ l_1 , l_2 とすると、l_1 と l_2 の交点の座標は $\left([\ オ\ ], -[\ カ\ ]a+\dfrac{[\ キ\ ]}{[\ ク\ ]}\right)$ と表すことができる。

ここで､放物線 C と接線 l_1 , l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めると、$a=\dfrac{[\ ケ\ ]}{[\ コ\ ]}$ となる。

（2011 北海道大）

４．a を正の実数とし、2 つの放物線 $C_1: y=x^2$, $C_2: y=x^2-4ax+4a$ を考える。
(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を $l: y=mx+n$ とすると、
求めよ． $m=[\ ア\ ]([\ イ\ ]-a)$, $n=-([\ ウ\ ]-a)^{[\ エ\ ]}$となる。
よって、2 つの放物線 C_1 , C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積は $\dfrac{[\ エ\ ]}{[\ オ\ ]}a^3$ である。

（2010 北海道大）

５．$0<a<1$ とする。曲線 $y=1-x^2$ と $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ の第 1 象限内での交点を A とし、A から x 軸に下ろした垂線の足を B とするとき、B の x 座標は[ア]である。また、原点を O とし、線分 OB と線分 AB と曲線 $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ とで囲まれた図形の面積を S とするとき、$S=\dfrac{[\ イ\ ]}{[\ ウ\ ]}a([\ エ\ ]-a^{[\ オ\ ]})$ と表すことができる。このとき、面積 S を最大にする a の値は $a=\dfrac{\sqrt{[\ カ\ ]}}{[\ キ\ ]}$ である。

（1999 北海道大）

６．$t≧0$ に対し、曲線 $y=x^2-t^2$ $(x≧0)$と x 軸 ,y 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の全面積を $S(t)$とおくと、$0<t<$［ ア ］のとき、$S(t)=\dfrac{[\ イ\ ]t^3-[\ ウ\ ]t^2+[\ エ\ ]}{[\ オ\ ]}$,

$t≧$［ ア ］のとき、$S(t)=t^2-\dfrac{[\ カ\ ]}{[\ キ\ ]}$となる。 よって t が変化するとき、$S(t)$の最小値は$\dfrac{[\ ク\ ]}{[\ ケ\ ]}$である。

（1982 北海道大）

７．座標平面上で、点(1 , 2)を通り傾き a の直線 l と放物線 C : $y=x^2$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$とする。

直線 l の方程式は $y=a(x-$［ ア ］$)+$［ イ ］と表すことができる。よって、直線 l と放物線 C の 2 つの交点の座標を$(\alpha,\alpha^2),(\beta,\beta^2)$ $(\alpha>\beta)$とすれば、解と係数の関係により、$\alpha+\beta=$［ ウ ］, $\alpha\beta=$［ エオ ］であるので、

$S(a)=\dfrac{[\ カ\ ]}{[\ キ\ ]}\left(\sqrt{a^2-[\ ク\ ]a+[\ ケ\ ]}\right)^3$ である。 a が $0≦a≦6$ の範囲を変化するとき、$S(a)$を最小にするような a の値は $a=$［ コ ］である。

（2010 京都大）

８．xy 平面上で、放物線 $C: y=x^2+x$ と、直線 $l: y=kx+k-1$ を考えるとき、放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲は $k<$［ アイ ］, $k>$［ ウ ］である。また、放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P, Q とし、その x 座標をそれぞれα , βとする。線分 PQ の長さを L, 線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とすると、

$L=\sqrt{(\beta-\alpha)^{[\ エ\ ]}([\ オ\ ]+k^2)}$ より k が上の範囲を動くとき、$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲は

$0<\dfrac{S}{L^3}<\dfrac{\sqrt{[\ カ\ ]}}{[\ キク\ ]}$ である。

（2003 京都大）

９．放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって、P, Q の座標をそれぞれ (α, α^2), (β, β^2) $(\alpha>\beta)$とする。この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に $\frac{9}{2}$ であれば、$\alpha-\beta=$［ ア ］となる。このとき、PQ の中点 R が描く図形の方程式は $y=x^2+\frac{[\ イ\ ]}{[\ ウ\ ]}$ である。

（1999 京都大）

※ 10. k を実数とする。3 次関数 $y=x^3-kx^2+kx+1$ が極大値と極小値をもち、極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき、$k=\frac{[アイ]}{[\ ウ\ ]}$ である。

（2019 九州大）

11. 定数 $a<1$ に対し、放物線 $C_1: y=2x^2+1$, $C_2: y=-x^2+a$ を考える。放物線 C_1, C_2 の両方に接する直線 l の方程式を $y=mx+n$ とする。l と C_1 が接することから m^2+［ ア ］$n-$［ イ ］$=0$, また、l と C_2 が接することから m^2-［ ウ ］$n+$［ エ ］$a=0$ が成り立つ。よって、直線 l の方程式は $y=\pm\frac{[\ オ\ ]\sqrt{[\ カ\ ]}\sqrt{[\ キ\ ]-a}}{[\ ク\ ]}x+\frac{a+[\ ケ\ ]}{[\ コ\ ]}$ の 2 本である。 次に、C_1 と 2 つの接線で囲まれた図形の面積を S_1, C_2 と 2 つの接線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき、$\frac{S_2}{S_1}=$［ サ ］である。

（2017 九州大）

12. 放物線 $y=x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$から直線 $y=x$ へ垂線を引き、交点を H とする。ただし、$t>1$ とする。

このとき、H の座標を t を用いて表すと $\left(\frac{[\ ア\ ]^2+[\ イ\ ]}{[\ ウ\ ]}, \frac{[\ ア\ ]^2+[\ イ\ ]}{[\ ウ\ ]}\right)$ である。

P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を R とするとき、三角形 PRH の面積を t を用いて表すと $\frac{t^4-[\ エ\ ]t^3+t^2}{[\ オ\ ]}$ である。

$x\geqq1$ の範囲において、放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき、S_1 を t を用いて表すと $\frac{1}{[\ カ\ ]}t^4-\frac{1}{[\ キ\ ]}t^3-\frac{1}{[\ ク\ ]}t^2+\frac{1}{[\ ケ\ ]}$ である。 ここで、放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき、$t=\frac{[\ コ\ ]+\sqrt{[サシ]}}{[\ ス\ ]}$ である。

（2011 九州大）

13.　曲線 $y=x^2$ の点 P(a , a^2)における接線と点 Q(b , b^2)における接線が点 R で交わるとする。ただし、$a<0<b$ とする。このとき、点 R の座標は $\left(\dfrac{[\ ア\ ]+[\ イ\ ]}{[\ ウ\ ]}, [\ エオ\ ]\right)$,

および三角形 P RQ の面積 S_1 は $\dfrac{[\ カ\ ]}{[\ キ\ ]}(b-a)^3$ である。また、線分 P R と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を P RQS とすと、折れ線 P S 曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積 S_2 は $\dfrac{[\ ク\ ]}{[\ ケコ\ ]}(b-a)^3$ である。次に、$\angle$P RQ = 90° を満たしながら P と Q が動くとき、S_2 の最小値は $\dfrac{[\ サ\ ]}{[\ シス\ ]}$ である。

（2009　九州大）

14.　b , c を実数, q を正の実数とする．放物線 P : $y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき、$q=\dfrac{b^2+[\ ア\ ]c}{[\ イ\ ]}$ であるから、放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いて表すと、S $=\dfrac{[\ ウ\ ]}{[\ エ\ ]}q\sqrt{q}$ である。

（2017　大阪大）

解答

１． $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

２． (1) $p=-4\,,\,q=-2$　(2) $\begin{cases} 0<t<\dfrac{5}{2}\text{のとき、}S(t)=\dfrac{8}{3}\left(-t^2+\dfrac{5}{2}t\right)^{\frac{3}{2}} \\ t\geqq\dfrac{5}{2}\text{のとき、}S(t)=0 \end{cases}$　(3) $\dfrac{125}{24}$

３． (1) $b=\dfrac{1}{2}\,,\,c=\dfrac{7}{2}-a$　(2) $\left(0\,,\,-2a+\dfrac{7}{2}\right)$　(3) $a=\dfrac{3}{2}$

４． (1) $y=2(1-a)x-(1-a)^2$　(2) $\dfrac{2}{3}a^3$

５． (1) $(a\,,\,0)$　(2) $\mathrm{S}=\dfrac{1}{3}a(1-a^2)$　(3) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

６． (1) $S(t)=\begin{cases} \dfrac{4t^3-3t^2+1}{3} & (0<t<1) \\ t^2-\dfrac{1}{3} & (t\geqq 1) \end{cases}$　(2) $\dfrac{1}{4}$

７． $a=2$

８． (1) $k<-3\,,\,k>1$　(2) $0<\dfrac{S}{L^3}<\dfrac{\sqrt{2}}{24}$

９． $y=x^2+\dfrac{9}{4}$

10． $k=-\dfrac{3}{8}$

11． (1) $y=\pm\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{1-a}}{3}x+\dfrac{a+2}{3}$　(2) $\dfrac{S_2}{S_1}=4$

12． (1) $\left(\dfrac{t+t^2}{2},\dfrac{t+t^2}{2}\right)$　(2) $\dfrac{(t^2-t)^2}{4}$　(3) $\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{6}$　(4) $t=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

13． (1) $\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b}{2},ab\right)$　$\triangle\mathrm{PRQ}=\dfrac{1}{4}(b-a)^3$　(2) $\dfrac{5}{12}(b-a)^3$　(3) $\dfrac{5}{12}$

14． $S=\dfrac{4}{3}q\sqrt{q}$