

円と直線

1. 座標平面において、点 $Q(0, 2)$ を中心とした半径 r の円に、原点 O を通る傾き m の直線が接している。半径 r の範囲が $0 < r < 2$ であるとき、 m を r で表せ。

(2019 岩手大)

2. xy 平面上で、原点を中心とする半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上の点 $P(a, b)$ で 2 次曲線 $y = x^2 + px + q$ が接している。すなわち点 P での円の接線と 2 次曲線の接線が一致している。点 P が第 1 象限にあり、 $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき、 p, q の値を求めよ。また、2 次曲線、円周の第 1 象限の部分、 y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(2019 慶応義塾大)

3. 方程式 $x^2 + y^2 - 6kx + (12k - 2)y + 46k^2 - 16k + 1 = 0$ が円を表すような定数 k の値の範囲を求めよ。また、 k の値がこの範囲で変化するとき、円の中心の軌跡を表す方程式を求めよ。

(2019 駒澤大)

4. r を正の定数とする。2 つの円 $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = r^2$ が共有点をもつような r の値の範囲を求めよ。

(2019 神奈川大)

5. 円 $C: x^2 + y^2 = 5$ がある。円 C 上の点 $P(-1, 2)$ における円 C の接線を l とする。 C との接点がある接線で l に直交する直線を m とする。 l と m の交点を Q とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

(2) 点 Q の座標を求めよ。

(3) 2 つの接線 l, m と円 C とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2019 神奈川大)

6. 円 $C: x^2 + y^2 - 8x - 8y + 30 = 0$ と直線 $l: y = x + k$ (k は定数) が 2 点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ で交わるものとする。ただし、 $a_1 < b_1$ である。 C の中心を $O, A'(a_1, 0), B'(b_1, 0)$ としたとき、 $\triangle OA'B'$ の面積が 2 より大きくなるような k の範囲は $\alpha < k < \beta$ である。このとき、 $\alpha + \beta$ はいくらか。

(2019 防衛医科大学)

7. 円 $C: x^2 + y^2 + ax - 4\sqrt{3}y + 4 = 0$ 上の点 $A(1, \sqrt{3})$ における接線を l とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 a は実数とする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。
- (3) 接線 l の方程式を求めよ。

(2018 岩手大)

8. 2点 $A(-2, -1)$ と $B(0, 1)$ について、線分 AB を $3:1$ に外分する点を中心とし、点 B を通る円の方程式を求めよ。

(2018 愛媛大)

9. 円 $C: x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$ と直線 $l: y = ax - a + 1$ について考える。直線 l は円 C に接するとする。 $|4a|$ の値を求めよ。ただし、 a は定数とする。

(2018 自治医科大)

10. 円 $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 10$ と直線 $x + 3y = k$ が接するような定数 k の値を求めよ。

(2018 千葉工業大)

11. 座標平面上の直線 $y = x + 1$ を l とする。また、実数 a に対して、円 $x^2 + y^2 - 8x - 2ay + a^2 = 0$ を C とし、その中心を点 P とする。

- (1) l が P を通るとき、 a の値を求めよ。
- (2) l と C が異なる2点で交わるための a の値の範囲を求めよ。
実数 a が(2)の範囲にあるとき、 l と C の2つの共有点を Q, R とする。
- (3) 三角形 PQR の面積が8となるような a の値をすべて求めよ。
- (4) $\angle QPR$ が 150° であるとき、 $(a-5)^2$ の値を求めよ。

(2018 慶応義塾大)

12. 点 $(2, 3)$ を中心として、点 $(0, 1)$ を通る塩の方程式を求めよ。

(2018 日本大)

13. a を正の定数とする。直線 $y = 2x$ から円 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ が切り取る線分の長さが1となるように a の値を求めよ。

(2018 東京都市大)

14. 円 $x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0$ の中心の座標、および半径を求めよ。また、この円と直線 $y = x - 1$ との交点の座標を求めよ。

(2018 関東学院大)

15. a を実数とする。点 $(3, 2)$ を通る傾きが a の直線 l と円 $C: x^2 + (y + 3a)^2 = 2$ がある。直線 l と円 C が異なる 2 点で交わるための a の条件を求めよ。

(2018 甲南大)

16. 座標平面上の 3 点 $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 1)$ を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

(2017 福島大)

17. 点 $A(3, 2)$ と円 $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 上の点 Q について考える。線分 AQ の中点を P とする。点 P の軌跡によって囲まれる領域の面積を S とする。 $\frac{7S}{\pi}$ の値を求めよ。

(2017 自治医科大学)

18. 円 $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$ と直線 $y = 2x - 7$ の交点を A, B とする。このとき、線分 AB の長さを求めよ。また、線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2017 慶応義塾大)

19. $(0, 3)$, $(8, -1)$, $(9, 0)$ を通る円の方程式は $x^2 + y^2 - [ア]x - [イウ]y - [エオ] = 0$ で、この円の半径は $\sqrt{[カ][キ]}$ である。

(2009 千葉工大)

20. 正の定数 a を含む方程式 $x^2 + y^2 - ax - 24y = a + 1$ が半径 15 の円を表すとき、 $a = [ア]$ であり、この円の中心の座標は $[イ]$ である。

(2006 中京大)

21. 座標平面上の 3 点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(a, a + 1)$ を通る円を C とする、次の間に答えよ。

(1) 円 C の方程式を a を用いて表せ。

(2) 円 C の半径が $\sqrt{5}$ となるときの a の値と円 C の中心の座標を求めよ。

(2004 信州大)

22. 直線 $y = 2x + k$ と円 $x^2 + y^2 = 2$ は異なる 2 点 A, B を共有している。

(1) 定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) $\triangle OAB$ の面積の最大値を求めよ。また、そのときの k の値を求めよ。ただし、 O は原点とする。

(2000 北海学園大)

23. 直線 $l: y = ax - 3a + 4$ と円 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ を考える。

- (1) 直線 l は a の値に関係なく定点 P を通る。この点 P の座標を求めよ。
- (2) 直線 l と円 C の共有点の個数を求めよ。
- (3) 円 C が直線 l と 2 点で交わり、円 C によって切り取られてできる線分の長さが 1 であるとき、 a の値を求めよ。

(2010 愛知教育大)

24. 円 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ と直線 $ax - y + 2a = 0$ が異なる 2 点 P, Q で交わる。次の問いに答えよ。

- (1) 円の中心の座標と半径を求めよ。
- (2) 定数 a のとるうる値の範囲を求めよ。
- (3) PQ の長さが $\sqrt{2}$ となる a の値を求めよ。

(2014 関西大)

解答

1. $m = \pm \frac{\sqrt{4-r^2}}{r}$

2. $p = -2\sqrt{3}, q = \frac{11}{4}$ 面積: $\frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{6}\pi$

3. $y = -2x + 1$ ($0 < x < 12$)

4. $2 \leq r \leq 8$

5. (1) $-x + 2y = 5$ (2) $Q(1, 3)$ (3) $S = 5 - \frac{5}{4}\pi$

6. 0

7. (1) $a = 4$ (2) 中心: $(-2, 2\sqrt{3})$ 半径: $2\sqrt{3}$ (3) $y = \sqrt{3}x$

8. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$

9. 3

10. $k = 3, 23$

11. (1) $a = 5$ (2) $5 - 4\sqrt{2} < a < 5 + 4\sqrt{2}$ (3) $a = 1, 9$ (4) $16 - 8\sqrt{3}$

12. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$

13. $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$

14. 中心 : $(-1, 0)$ 半径 : $\sqrt{10}$ 交点座標 : $(2, 1), (-2, -3)$

15. $a < -1, a > 1$

16. 中心 : $(2, -1)$ 半径 : $\sqrt{5}$

17. 7

18. $AB = 4\sqrt{6}$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

19. [ア] 4 [イウ] 12 [エオ] 45 [カキ] 85

20. [ア] 16 [イ] $(8, 12)$

21. (1) $x^2 + y^2 + (2a^2 - 1)x - (2a^2 + 1)y = 0$ (2) $(-1, 2)$

22. (1) $-\sqrt{10} < k < \sqrt{10}$ (2) $k = \pm\sqrt{5}$ のとき最大値 1

23. (1) $(3, 4)$ (2) $\frac{6 - \sqrt{22}}{2} < a < \frac{6 + \sqrt{22}}{2} \rightarrow 2$ 個 , $a = \frac{6 \pm \sqrt{22}}{2} \rightarrow 1$ 個 , それ以外はなし

(3) $\frac{8 \pm \sqrt{35}}{3}$

24. 中心 : $(0, 1)$ 半径 : 1 (2) $0 < a < \frac{4}{3}$ (3) $a = 1, \frac{1}{7}$