

## 三角関数の基本的性質

1.  $0 \leq x \leq 2\pi$  のとき、 $\sin 2x = \cos x$  を満たす  $x$  をすべて求めよ。

(2019 岩手大)

2. 2直線  $y = -2x$ ,  $y = \frac{3}{2}x$  のなす角を  $\theta$  とするとき、 $\tan \theta$  の値を求めなさい。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。

(2019 秋田大)

3.  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、 $3\cos 2\theta + 4\sin \theta$  の最大値と最小値を求めなさい。

(2019 福島大)

4.  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$  の値を求めなさい。

(2019 福島大)

5.  $0 \leq \theta \leq \pi$  のとき、関数  $y = \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta$  の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの  $\theta$  の値を求めよ。

(2019 山梨大)

6.  $k$  を実数の定数とする。2次方程式  $3x^2 + \sqrt{6}x + k = 0$  について、次の問いに答えよ。

(1) この2次方程式が実数解をもつような  $k$  の値の範囲を求めよ。

(2)  $\theta$  を  $0 \leq \theta \leq \pi$  をみたす定数とする。この2次方程式の2つの解が  $2\cos \theta + \sin \theta$ ,  $\cos \theta + 2\sin \theta$  のとき、 $\cos \theta \sin \theta$  の値を求めよ。

(3) (2)のとき、 $k$  の値を求めよ。

(4) (2)のとき、 $\cos 2\theta$  の値を求めよ。

(2019 高知大)

7. 関数  $y = \cos^2 x - \sin x$  ( $0 \leq x < 2\pi$ ) の最大値および最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値をそれぞれ求めよ。

(2019 長崎大)

8.  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$  のとき、方程式  $\cos 2\theta + \sin \theta = 1$  を解け。

(2019 琉球大)

9.  $0 \leq \theta \leq \pi$  とするとき、等式  $\cos 4\theta = \cos 2\theta$  を満たす  $\theta$  の値をすべて求めよ。

(2019 名古屋市立大)

10. 関数  $\cos \theta + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$  の最大値は [     ] である。

(2019 東北学院大)

11. 2次方程式  $25x^2 - 35x + 2k = 0$  の2つの解がそれぞれ  $\sin \theta, \cos \theta$  であるとする。 $k$  の値を求めよ。

(2019 自治医科大)

12. 関数  $y = 3\sqrt{3} \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta$  がある。 $\theta$  が  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  を満たすとき、この関数の最大値および最小値を求めよ。また、そのときの  $\theta$  の値をそれぞれ求めよ。

(2019 慶応義塾大改)

13.  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  に対し、 $f_m(\theta) = \sum_{k=0}^m \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}k\right)$  とする。 $f_2(\theta)$  の最大値は [ ア ] であり、このときの  $\theta$  は、 $\theta =$  [ イ ] である。また、 $f_4(\theta) =$  [ ウ ]  $\times \sin \theta$  である。

(2019 慶応義塾大)

14. 関数  $y = 2\cos^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) は  $\theta =$  [ ア ] のとき最大値 [ イ ] をとる。

(2019 慶応義塾大)

15.  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$  とし、 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$  とする。このとき、次の値をそれぞれ求めよ。

$$(1) \cos(\alpha + \beta) = -\frac{[\text{アイ}]\sqrt{[\text{ウ}]}}{[\text{エオ}]} \quad (2) \sin(\beta - \alpha + \pi) = -\frac{\sqrt{[\text{カ}]}}{[\text{キ}]}$$

(2019 国士舘大)

16.  $\theta$  の範囲を  $0 \leq \theta < \pi$  とする。点  $P(\cos \theta, \sin 2\theta)$  が直線  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$  上の点となるのは

$\theta = \frac{[\text{ア}]}{[\text{イ}]} \pi, \frac{[\text{ウ}]}{[\text{エ}]} \pi$  のときであり、直線  $y = \sqrt{3}x$  上の点となるのは  $\theta = \frac{[\text{オ}]}{[\text{カ}]} \pi,$

$\frac{[\text{キ}]}{[\text{ク}]} \pi, \frac{[\text{ケ}]}{[\text{コ}]} \pi$  のときである。ただし、 $\frac{[\text{ア}]}{[\text{イ}]} < \frac{[\text{ウ}]}{[\text{エ}]}, \frac{[\text{オ}]}{[\text{カ}]} < \frac{[\text{キ}]}{[\text{ク}]} < \frac{[\text{ケ}]}{[\text{コ}]}$  とする。

(2019 駒澤大)

17.  $k$  を定数とし、 $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。2次方程式  $2x^2 + 2\sqrt{2}x + k = 0$  の2つの解が  $\sin \theta, \cos \theta$  であるとき、 $k$  の値と  $\theta$  の値をそれぞれ求めよ。

(2019 専修大)

18.  $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{5}{13}$  のとき、 $\tan(\alpha - \beta)$  を求めよ。ただし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  とする。

(2019 東京都市大)

19.  $t = \tan \theta$  とおくと、 $\tan 2\theta, \sin 2\theta$  をそれぞれ  $t$  の式で表せ。

(2019 早稲田大)

20. 関数  $f(\theta) = 3(1 + \sin 2\theta)^2 - 4(\sin \theta + \cos \theta)^3$  とし、 $t = \sin \theta + \cos \theta$  とする。 $\theta$  が  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき、次の問いに答えよ。

(1)  $t$  の値の範囲を求めよ。

(2) 関数  $f(\theta)$  を  $t$  を用いて表せ。

(3) 関数  $f(\theta)$  の最小値と、そのときの  $\theta$  の値を求めよ。

(2019 神奈川大)

21.  $0 \leq x \leq \pi$  のとき、 $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x$  の最小値は [ ] である。

(2019 神奈川大)

22.  $3\cos 2\theta + 5\cos \theta - 3 = 0$  を満たす  $\theta (0 < \theta < \pi)$  に対して、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{[\text{ア}]}}{[\text{イ}]}$  である。

(2019 関東学院大)

23. ベクトル  $\vec{a} = (1, 1, \sqrt{3})$ ,  $\vec{b} = (-1, \cos \theta, \sin \theta)$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) について、ベクトル  $\vec{a} - \vec{b}$  の大きさ  $|\vec{a} - \vec{b}|$  は  $\theta = \frac{[\text{ア}]}{[\text{イ}]} \pi$  で最大値  $\sqrt{[\text{ウエ}]}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{[\text{オ}]}$  で最小値  $\sqrt{[\text{カ}]}$  をとる。

(2019 金沢工業大)

24. 関数  $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) の最大値および、そのときの  $\theta$  の値を求めよ。

(2019 京都産業大)

25.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき、 $x$  についての方程式  $\log_3 \sin x + \log_3 \cos x + 2 \log_3 2 - \frac{1}{2} = 0$  の解は  $x = [ \quad ], [ \quad ]$  である。

(2019 立命館大)

26. 関数  $f(\theta) = \sin 2\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta$  ( $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{7}{12} \pi$ ) の最大値、最小値を求めよ。

(2019 関西大)

27.  $\vec{a} = (2 \cos \theta - \sin \theta, \cos \theta + 2 \sin \theta)$ ,  $\vec{b} = (-\cos \theta + 2 \sin \theta, 2 \cos \theta + \sin \theta)$  とおく。ただし、 $0 < \theta < \pi$  とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が垂直であるとき  $\theta$  を求めよ。

(2)  $2\vec{a} + \vec{b}$  の大きさを  $\theta$  を用いて表せ。またその値の範囲を求めよ。

(3)  $\theta = \frac{5}{12} \pi$  であるとき、 $2\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} - k\vec{b}$  が垂直となる  $k$  の値を求めよ。

(2019 関西医科大学)

28. 関数  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  の最大値を求めよ。

(2019 防衛医科大学)

29.  $0 \leq x < 2\pi$  とするとき、 $\sin x - \sqrt{3} \cos x < 0$  を解け。

(2018 福島大)

30.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\tan x$  を用いて  $\cos x$ ,  $\sin x$  の値を表せ。

(2018 福島大)

31. 方程式  $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$  をみたす  $\theta$  の値をすべて求めよ。

(2018 新潟大)

32. 関数  $f(x) = 2\cos^2\frac{x}{2} + \sin x + 3$  の区間  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  における最大値と最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値を求めよ。

(2018 山梨大)

33.  $\theta$  が  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき、座標平面上の直線  $y = (\sin\theta)x + \cos\theta$  上の点

$(x, y)$  について、不等式  $-|x| \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}$  が成り立つことを示せ。

(2018 信州大)

34. 関数  $f(t) = (\sin t - \cos t) \sin 2t$  を考える。

(1)  $x = \sin t - \cos t$  とおくとき、 $f(t)$  を  $x$  を用いて表せ。

(2)  $t$  が  $0 \leq t \leq \pi$  の範囲を動くとき、 $f(t)$  の最大値と最小値を求めよ。

(2018 大阪大)

35.  $90^\circ < \theta < 270^\circ$  で  $\sin\theta = \frac{2}{7}$  のとき、 $\cos\theta$  と  $\tan\theta$  を求めよ。

(2018 愛媛大)

36.  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  で  $\cos\theta = \frac{3}{5}$  のとき、 $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$  の値を求めよ。

(2018 佐賀大)

37.  $0 < \theta < \pi$  で  $\tan\theta = -2\sqrt{2}$  のとき、 $\cos\theta$  と  $\cos\frac{\theta}{2}$  の値を求めよ。

(2018 長崎大)

38.  $\sin^2x - \sin^2y = \sin(x+y)\sin(x-y)$  を示せ。

(2018 鹿児島大)

39. 半径 3, 中心角  $\frac{5}{12}\pi$  の扇形の弧の長さを求めよ。

(2018 高崎経済大)

40.  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$  であるとき、 $2\sin^3 \theta + 2\cos^3 \theta - 3\sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2}$  の値を求めよ。

(2018 自治医科大学)

41.  $xy$  平面に曲線  $C: y = \sin x$  がある。 $x$  座標が  $\theta$  である  $C$  上の点を  $P$  とし、 $x$  座標が  $\theta + \frac{\pi}{3}$  である  $C$  上の点を  $Q$  とする。線分  $PQ$  を  $2:1$  に内分する点を  $R$  とすると、 $R$  の  $y$  座標  $Y$  は  $Y = \frac{[\text{ア}]}{[\text{イ}]} \sin \theta + \frac{\sqrt{[\text{ウ}]}}{[\text{エ}]} \cos \theta$  と表される。において、 $Y$  の最大値は  $\frac{\sqrt{[\text{オ}]}}{[\text{カ}]}$  で

あり、 $Y$  が最大になるときの  $P$  の  $y$  座標は  $\frac{[\text{キ}] \sqrt{[\text{ク}]}}{[\text{ケ}]}$  である。

(2018 千葉工業大)

42.  $\cos 2\theta - 2\sin \theta$  ( $0 \leq x < 2\pi$ ) は  $\theta = [ \quad ]$  のとき最小値  $[ \quad ]$  をとる。

(2018 慶応義塾大)

43.  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。関数  $y = \sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$  は  $\theta = [ \quad ]$  のとき最大値  $[ \quad ]$  をとる。

(2018 工学院大)

44. 次の問いに答えよ。

(1)  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき、不等式  $1 - \sqrt{3} \tan \theta < 0$  をみたす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

(2)  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき、方程式  $2\cos^2 \theta + (2 + \sqrt{3})\sin \theta - 2 - \sqrt{3} = 0$  をみたす  $\theta$  の値を求めよ。

(2018 国土館大)

45. 直線  $y = (\sqrt{2} - 1)x - 6$  と  $x$  軸のなす鋭角を  $\theta$  とすると、 $\tan \theta = \sqrt{[ア]} - [イ]$  ,  
 $\tan 2\theta = [ウ]$  ,  $\tan 3\theta = \sqrt{[エ]} + [オ]$  である。

(2018 駒澤大)

46.  $\pi \leq x < 2\pi$  のとき、関数  $g(x) = \sin x - \cos x$  の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。  
 (2018 専修大)

47.  $0 \leq x < \pi$  のとき、方程式  $\sin 2x = \sqrt{3} \cos x$  を解け。  
 (2018 中央大)

48.  $0 < \theta < \pi$  のとき、 $\sin \theta + \cos 2\theta = 1$  を満たす  $\theta$  の値をすべて求めよ。  
 (2018 東京電機大)

49.  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき、 $\left( \sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \right) \left( \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right) = \frac{[アイ]}{[ウ]}$  ,  
 $\left( \sin^2 \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{[エオ]}{[カ]}$  である。  
 (2018 東邦大)

50. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。  
 $y = 2\sin 2x + 3\sin x \cos x + 4\cos 2x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$   
 (2018 日本女子大)

解答

1.  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

2.  $\frac{7}{4}$

3. 最大値  $\frac{11}{3}$  最小値  $-7$

4.  $\frac{9\sqrt{3}}{16}$

5.  $\theta = \frac{7}{8}\pi$  のとき最大値  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$   $\theta = \frac{3}{8}\pi$  のとき最小値  $\frac{-\sqrt{2}+1}{2}$

6. (1)  $k \leq \frac{1}{2}$  (2)  $-\frac{24}{25}$  (3)  $-\frac{17}{18}$  (4)  $\frac{2\sqrt{26}}{27}$

7.  $x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$  のとき最大値  $\frac{5}{4}$   $x = \frac{1}{2}\pi$  のとき最小値  $-1$

8.  $0^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 360^\circ$

9.  $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$

10. 2

11.  $k=6$

12.  $\theta = \frac{5}{12}\pi$  のとき最大値  $\frac{5\sqrt{3}}{2}+1$   $\theta=0$  のとき最小値  $2\sqrt{3}$

13. ア  $\sqrt{2}+1$  イ  $\frac{7}{4}\pi$  ウ  $-(\sqrt{2}+1)$

14. ア  $\frac{11}{12}\pi$  イ  $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

15. (1) ア 3 イ 1 ウ 2 エ 5 オ 0 (2) カ 2 キ 2

16. ア 1 イ 8 ウ 3 エ 8 オ 1 カ 3 キ 1 ク 2 ケ 2 コ 3

17.  $k=1$   $\theta = \frac{5}{4}\pi$

18.  $-\frac{33}{56}$

19.  $\tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$ ,  $\sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2}$

20. (1)  $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$  (2)  $f(\theta) = 3t^4 - 4t^3$  (3)  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$

21.  $-1$

22. ア 5 イ 3

23. ア 4 イ 3 ウ 1 エ 3 オ 3 カ 5



24.  $\theta = \frac{\pi}{6}$  のとき最大値 2

25.  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$  (順不同)

26. 最大値 2 最小値 1

27. (1)  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (2)  $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{25 + 20\sin 2\theta}$   $\sqrt{5} \leq |2\vec{a} + \vec{b}| \leq 3\sqrt{5}$  (3)  $k = \frac{5}{4}$

28.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

29.  $0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$

30.  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ ,  $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$

31.  $\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

32.  $x = \frac{\pi}{4}$  のとき最大値  $\sqrt{2} + 4$   $x = -\frac{\pi}{2}$  のとき最小値 3

33. 略

34. (1)  $f(t) = -x^3 + x$  (2) 最大値  $\frac{2\sqrt{3}}{9}$  最小値  $-\sqrt{2}$

35.  $\cos \theta = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$   $\tan \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$

36.  $-\frac{7}{50} - \frac{12}{25}\sqrt{3}$

37.  $\cos \theta = -\frac{1}{3}$   $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

38. 略

39.  $\frac{5}{4}\pi$

40. 3

41. ア 2 イ 3 ウ 3 エ 3 オ 7 カ 3 キ 2 ク 7 ケ 7

42.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき最小値 -3

43.  $\theta = \frac{\pi}{3}$  のとき最小値  $\sqrt{3}$

44. (1)  $30^\circ < \theta < 90^\circ$  (2)  $\theta = 120^\circ$

45. ア 2 イ 1 ウ 1 エ 2 オ 1

46. 最大値 1 最小値  $-\sqrt{2}$

47.  $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi$

48.  $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

49. ア - イ 1 ウ 3 エ 1 オ 9 カ 9

50. 最大値  $\frac{1}{2}(6 + \sqrt{13})$  最小値  $\frac{1}{2}(6 - \sqrt{13})$