平面ベクトルの基本的性質

１． $\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,2)$ のとき、$|\vec{a}+t\vec{b}|=5$ を満たす t の値のうち負のものは（　　）である。

（2019 帝京大）

２． $\triangle$ABC にて $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-2$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-3$. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-4$ である。このとき各辺の長さは $AB=\sqrt{[\ ア\ ]}$, $BC=\sqrt{[\ イ\ ]}$, $CA=\sqrt{[\ ウ\ ]}$ となる。また $\cos A=\dfrac{[\ エ\ ]\sqrt{[\ オカ\ ]}}{[\ キク\ ]}$ となる。

（2020 駒澤大）

３． 2 つのベクトル $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-4,1)$ について、$\vec{a}+k\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直となるような定数 k の値は（　　）である。

（2019 神奈川大）

４． $\triangle$OAB において、線分 AB を 1 : 4 に内分する点を C とし、$\angle$OAB の二等分線と辺 OB の交点を D，線分 OC と線分 AD の交点を E とする。また、$OA=2$, $OB=\sqrt{5}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$ とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。

(1) 辺 AB の長さは（　ア　）である。

(2) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a},\vec{b}$ で表すと $\overrightarrow{OC}=$（　イ　）である。

(3) $\overrightarrow{AD}$ を $\vec{a},\vec{b}$ で表すと $\overrightarrow{AD}=$（　イ　）である。

(4) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a},\vec{b}$ で表すと $\overrightarrow{OE}=$（　イ　）である。

(5) $\triangle$OAE の面積は（　オ　）である。

（2019 九州産業大）

５． $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$ で、ベクトル $\vec{a}-\vec{b}$ と $5\vec{a}+2\vec{b}$ が垂直であるとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角の値は（　　）である。

（2019 京都産業大）

６． $|\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{b}|=1, |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ である。このとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は（　ア　）である。また、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ は（　イ　）である。ただし、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ である。

（2018 甲南大）

７． $\triangle$OAB において、$\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=4$, $\mathrm{AB}=2$ である。$\angle$AOB の二等分線と辺 AB との交点を C とし、$\angle$OAB の二等分線と線分 OC との交点を I とする。また、辺 AO を 1 : 4 に外分する点を D とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ。

(3) $\triangle$ADI の面積を求めよ。

（2020 芝浦工業大）

８． 平面上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3, |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=7, |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=4$ および

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たす。AB を 1 : 2 に内分する点を P とする。以下の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を θ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ を求めよ。

(4) 点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たす。$\triangle$OQC び面積 S_1, $\triangle$OBC の面積 S_2 の関係を $S_1=kS_2$ と表すとき、k の値を求めよ。

（2018 昭和大）

９． $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ であるとき、$|\vec{a}-\vec{b}|=$（　ア　）である。また、実数 t に対して $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値は（　イ　）である。

（2020 成蹊大）

10. 座標平面上の 3 点 A(2 , 0) , B(4 , 5) , C(−3 , 1)について、$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=4$ を満たす点 P(x , y)の軌跡の方程式は $([\text{ア}]-[\text{イ}]x)^2+([\text{ウ}]-[\text{エ}]y)^2-16=0$ である。 また、その面積は $\dfrac{[\text{オカ}]}{[\text{キ}]}\pi$ である。

（2019 創価大）

11. 中心 A($\vec{a}$) , 半径 1 の円 C と、原点 O を通り方向ベクトルが $\vec{d}$ である直線 l を考える。l のベクトル方程式の媒介変数を t とする。ただし、$|\vec{a}|=4, |\vec{d}|=1$ とする。直線 l と円 C が 2 つの点 P_1 , P_2 で交わる。

(1) 直線 l と円 C が交わる点において、媒介変数 t が満たす式は、

$t^2+[\text{アイ}](\vec{a}\cdot\vec{d})t+[\text{ウエ}]=0$ である。

(2) $|\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OP_2}|=[\text{オカ}]$ である。

(3) 原点 O を通り方向ベクトルが $\vec{g}=(-2, 1)$ である直線 m を考える。直線 m と円 C が交わる 2 点を Q_1 , Q_2 とすると、$|\overrightarrow{OQ_1}||\overrightarrow{OQ_2}|=[\text{キ}]\cdot|\vec{g}|^2$ である。

（2020 西南学院大）

12. △ABC の辺 AB , BC , CA を 3 : 1 に内分する点をそれぞれ D , E , F とし、線分 AE と BF の交点を P , BF と CD の交点を Q , CD と AE の交点を R とする。
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると、$\overrightarrow{AE}=\dfrac{[\text{ア}]}{[\text{イ}]}\vec{b}+\dfrac{[\text{ウ}]}{[\text{エ}]}\vec{c}$, $\overrightarrow{AP}=\dfrac{[\text{オ}]}{[\text{カキ}]}\vec{b}+\dfrac{[\text{ク}]}{[\text{ケコ}]}\vec{c}$ となる。
また、AP : PR : RE = [サ] : [シ] : [ス]であり、△PQR の面積は△ABC の面積の $\dfrac{[\text{セ}]}{[\text{ソタ}]}$ 倍である。

△PQR の重心を G とすると $\overrightarrow{AG}=\dfrac{[\text{チ}]}{[\text{ツ}]}\vec{b}+\dfrac{[\text{テ}]}{[\text{ト}]}\vec{c}$ となる。

（2020 順天堂大）

13.　平面上の三角形 OAB において $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) ∠AOB の二等分線のベクトル方程式を $\vec{a}, \vec{b}$ と実数 t を用いて表せ。

(2) ∠AOB の二等分線と AB の交点を M とするとき、$\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ。

（2020 東北学院大）

14.　△ABC の内部に点 P を $3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たすようにとり、直線 AP と辺 BC の交点を D とすると、点 D は辺 BC を（　ア　）に内分し、点 P は線分 AD を（　イ　）に内分する。

（2018 独協大）

15.　ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $|\vec{a}|=3, |\vec{a}-\vec{b}|=5, |\vec{a}+\vec{b}|=7$ をみたすとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=$［ ア ］,

$|\vec{b}|=$［ イ ］$\sqrt{［ ウ ］}$である。

（2020 千葉工大）

16. △ABC において、AB = 2 , AC = 3 , BC = 4 である。AB の中点を D , AC を 1 : 2 に内分する点を E とする。CD と BE の交点を F とし、直線 AF と BC の交点を K とする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とし、以下の設問に答えよ。

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 線分 AK の長さを求めよ。

（2020 中央大）

17. △ABC の辺 BC , CA , AB をそれぞれ 1 :2 に内分する点を A_1 , B_1 , C_1 とする。また、△$A_1B_1C_1$ の辺 B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 をそれぞれ 1 : 2 に内分する点を A_2 , B_2 , C_2 とする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{C_2A_2}$ および $\overrightarrow{C_2B_2}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

（2014 津田塾大）

18. 原点をOとする座標平面上に2点A(4 , 0) , B(0 , 3)をとる。この平面上の点Pが $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OP}=\vec{0}$ を満たすとき、次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とおくと、$|\vec{p}|^2-\dfrac{[\ \text{ア}\ ]}{[\ \text{イ}\ ]}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}=[\ \text{ウ}\ ]$が成り立つ。

(2) 点Pは中心C$\left(\dfrac{[\ \text{エ}\ ]}{[\ \text{オ}\ ]}, [\ \text{カ}\ ]\right)$, 半径$\dfrac{[\ \text{キ}\ ]}{[\ \text{ク}\ ]}$の円周上の点であり、△ABCの面積は[ケ]である。

（2020 東京農業大）

19. 実数tに対して$\vec{a}=(t, 1), \vec{b}=(2, 3)$ とし、$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$とする。$|\vec{p}|$は$k=$（ ア ）のとき、最小値（ イ ）をとる。

（2020 東邦大）

20. 点Oを中心とする半径1の円に内接する△ABCがある。$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OC}$を満たすとき、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{[\ \text{ア}\ ]}{[\ \text{イ}\ ]}$であり、$AB=\dfrac{\sqrt{[\ \text{ウ}\ ]}}{[\ \text{エ}\ ]}$である。

（2019 日本大）

21. Oを原点とするxy平面において、点P(x , y)は次をみたすという。

$\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq 0,\ \vec{b}\cdot\vec{p}\geqq 0,\ \vec{p}\cdot\vec{p}\leqq 10$

ただし、$\vec{a}\cdot\vec{p}$は$\vec{a}$と$\vec{p}$の内積を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

問１　点P(x , y)の存在する範囲Dをxy平面上に図示し、その面積を求めよ。

問２　点P(x , y)が問１のD上を動くとき、$\vec{c}$=(1 , −3)に対して$\vec{c}\cdot\vec{p}$の最小値と、そのときの点P(x , y)の座標を求めよ。

（2019 日本獣医生命科学大）

22. 四角形OABCについて、OA = 2 , OC = 1 , ∠AOC = 120°, ∠OAB = 90°であって、OBとACの交点をPとするとき、AP :PC = 3 :1 であるとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ で表せ。

(2) 四角形 OABC の面積 S を求めよ。

（2020 日本女子大）

23. 三角形 ABC の 3 辺 AB , BC , CA 上にそれぞれ点 P，点 Q，点 R がある。

$$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad , \quad \overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}} \quad , \quad \overrightarrow{\mathrm{RA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PR}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

が成り立つとき、次の問いに答えよ。

(1) AP : PB を求めよ。

(2) BQ : QC を求めよ。

(3) 三角形 ABC の面積と三角形 PQR の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とするとき、$S_1 : S_2$ を求めよ。

（2018 北海学園）

24. 原点を O とする平面上に△ABC がある。△ABC の 3 頂点 A , B , C に対し、$10\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ が成り立つとき、△OAB の面積は△ABC の面積の $\dfrac{[\ ア\ ]}{[\ イウ\ ]}$ 倍である。

（2019 藤田保健衛生大）

25. $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{33}$ であるとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [ア] であり、$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{[\ イウ\ ]}$ である。また、$\vec{a}-k\vec{b}$（ただし、k は実数）が $\vec{a}-\vec{b}$ と垂直であるとき、$k=-\dfrac{[\ エ\ ]}{[\ オカ\ ]}$ である。

（2019 武庫川女子大）

26. △ABC において、辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D , 2 : 1 に内分する点を E とし、辺 CA 上に $\mathrm{AP}=k\mathrm{AC}$ となる点 P があるとする（ただし、$0<k<1$ である）。また、線分 BP が線分 AD , AE と交わる点を、それぞれ Q , R とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とする。s , t をそれぞれ k の式で表せ。

（2020 明治大）

解答

１．－3

２．ア 6イ 5ウ 7エ 2オ 4カ 2キ 2ク 1

３．$\frac{7}{19}$

４．(1) 1　(2) $\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$　(3) $-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　(4) $\frac{8}{11}\vec{a}+\frac{2}{11}\vec{b}$　(5) $\frac{2}{11}$

５．120°

６．ア －1　イ $\frac{3}{4}\pi$

７．(1) $\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(2) $\frac{21}{2}$　(3) $\frac{\sqrt{15}}{12}$

８．(1) $\frac{17}{32}$　(2) $\frac{10}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　(3) $\frac{\sqrt{634}}{6}$　(4) $\frac{3}{5}$

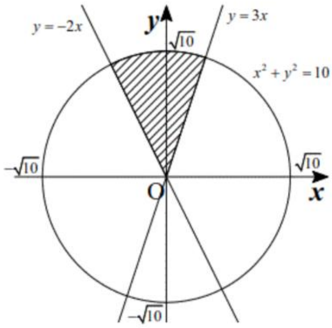
９．ア $\sqrt{37}$　イ $2\sqrt{3}$

10. ア 3　イ 3　ウ 6　エ 3　オ 1　カ 6　キ 9

11. ア －　イ 2　ウ 1　エ 5　オ 1　カ 5　キ 3

12. ア 1　イ 4　ウ 5　エ 4　オ 1　カ 1　キ 3　ク 3　ケ 1　コ 3　サ 4　シ 8
ス 1　セ 4　ソ 1　タ 3　チ 1　ツ 3　テ 1　ト 3

13. (1) $t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$



14. ア 5：4　イ 3：1

15. ア 6　イ 2　ウ 7

16. (1) $-\frac{3}{2}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$　(3) $\frac{\sqrt{19}}{3}$

17. $\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=-\frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{C_2B_2}}=-\frac{1}{3}\vec{b}$

18. ア 2　イ 3　ウ 0　エ 4　オ 3　カ 1　キ 5　ク 3　ケ 2

19. ア $-\frac{1}{6}$　イ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

20. ア 1　イ 4　ウ 6　エ 2

21. 問１　右上図　面積$\frac{5\pi}{4}$　問２　点 P(－1 , 3)のとき最小値－10

22. (1) $\vec{b}=4\vec{a}+12\vec{c}$　(2) $8\sqrt{3}$

23. (1) 1 : 1　(2) 2 : 1　(3) 4 : 1

24. ア 4　イ 1　ウ 9

25. ア 4　　イ 1　　ウ 7　　エ 5　　オ 1　　カ 2

26. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(2) $s=\frac{3k}{2k+1}, t=\frac{3k}{k+2}$