No2　円に内接する四角形

《例題》

円に内接する四角形 ABCD において、$AB=1+\sqrt{3}$, $BC=CD$, $DA=2$, また、$\angle DAB=60^\circ$である。四角形 ABCD の対角線の交点を P , $\angle BCD$ の二等分線と辺 AB との交点を Q , BD と CQ の交点を R とするとき、以下の問いに答えよ。なお数値の分母は有理化すること。

(1) 辺 BD の長さを求めよ。

(2) $\angle ABD$ の大きさを求めよ。

(3) 辺 BP の長さを求めよ。

(4) 三角形 PQR の内接円の半径を求めよ。

（2016　日本医科大）

【演習】

1．半径 R の円周上に点 A , B , C , D がこの順で反時計回りに並んでいる。線分 AB , AC , BC , CD の長さはそれぞれ 1 , $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, 2 である。以下の問いに答えよ。

(1) cosB を求めよ。

(2) 円の半径 R を求めよ。

(3) cosD を求めよ。

(4) 線分 AD の長さを求めよ。

(5) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

（2009　首都大東京改）

2．円に内接する四角形 ABCD において、$AB=5$, $BC=3$, $DA=2$, $\angle ABC=60^\circ$ であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 辺 CD の長さを求めよ。

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

(3) $\triangle BCD$ の面積を求めよ。

(4) 対角線 BD の長さを求めよ。

（2011　同志社大）

3．円に内接する四角形 ABCD において、$AB=6$, $BC=CD=3$, $\angle ABC=120^\circ$ のとき、辺 AD の長さと、四角形 ABCD の面積を求めよ。

（福岡大）

4．次の［　　］を数値でうめよ。ただし、［ ア ］，［ イ ］の数値は整数である。
円に内接する四角形 ABCD の長さが、$AB=\sqrt{6}$, $BC=\sqrt{7}$, $CD=\sqrt{2}$, $DA=1$ とする。
このとき、$AC^2=\dfrac{[\text{ア}]+\sqrt{[\text{イ}]}}{2}$ だから $AC=\dfrac{\sqrt{3}+[\text{ウ}]}{2}$ となる。また、$\angle ABC=\theta$ とおくと $\sin^2\theta=$［ エ ］だから $\sin^2\theta=\dfrac{AC^2}{[\text{オ}]}$ となり、円の半径は［ カ ］であることがわかる。また、四角形 ABCD の面積は［ キ ］である。

（2009　関西大）

5．円に内接する四角形 ABCD があり、$AB=\sqrt{3}$, $BC=3\sqrt{3}$, $CD=DA=\sqrt{7}$,
$\angle ABC=60^\circ$ を満たしている。また、点 A と点 C を線分で結び、三角形 ABC の内接円の中心を I, その内接円と辺 BC の接点を E とする。このとき、以下の問いに答えよ。
(1) IE を求めよ。ただし、答えは、分数の分母を有理化した形で書け。
(2) CE を求めよ。
やや難 (3) 点 I と点 D を線分で結ぶとき、ID を求めよ。

（2012　日本大・医）

6．四角形 ABCD は円 O に内接していて、$AB=3$, $BC=7$, $CD=7$, $DA=5$ とする。
(1) $\angle A$ の大きさを求めよ。
(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ。
(3) 円 O の半径を求めよ。
(4) 三角形 ABD の内接円の半径を求めよ。
(5) 対角線 AC , BD の交点を E とするとき、$\sin\angle AEB$ の値を求めよ。

（2014　昭和大）

7．半径 1 の円に内接する四角形 ABCD において、$BC=CD$, $BD=2$, $AC=\sqrt{3}$ で、$\angle ABC$ が鋭角のとき、$BC=$［ ア ］であり、$AD=$［ イ ］である。

（2017　名城大）

8．円に内接する四角形 ABCD において、$AB=2\sqrt{3}$ ，$BC=2$, $CD=\sqrt{2}$ ，$\angle ABC=30^\circ$ であるとき、AD の長さを求めよ。

（2017　日本大）

9．半径 R の円に内接する四角形 ABCD が、$AB=\sqrt{3}-1$, $BC=\sqrt{3}+1$, $\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{4}$ を満たしており、△ACD の面積は△ABC の面積の 3 倍であるとする。このとき、

$AC=$［ ア ］, $\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{[\ イ\ ][\ ウ\ ]}}{4}$, $R=\dfrac{[\ エ\ ]\sqrt{[\ オ\ ][\ カ\ ]}}{[\ キ\ ]}$ である。

また、△ACD の面積は $\dfrac{[\ ク\ ]\sqrt{[\ ケ\ ][\ コ\ ]}}{4}$ であるから、$AD\times CD=$［ サ ］,

$AD^2+CD^2=$［ シス ］となる。

したがって四角形 ABCD の周の長さは［ セ ］$\sqrt{[\ ソ\ ]}+2\sqrt{3}$ である。

（2002　センター・本）

10. 四角形 ABCD は、円 O に内接していて、$AB=3$, $BC=7$, $CD=7$, $DA=5$ とする。

(1) $\angle A=$［ アイウ ］°であり、$BD=$［ エ ］, $AC=$［ オ ］である。また、四角形 ABCD の面積は［ カキ ］$\sqrt{[\ ク\ ]}$ である。

(2) 円 O の半径は $\dfrac{[\ ケ\ ]\sqrt{[\ コ\ ]}}{[\ サ\ ]}$ である。

(3) 三角形 ABD の内接円の半径は $\dfrac{\sqrt{[\ シ\ ]}}{[\ ス\ ]}$ である。

(4) 対角線 AC , BD の交点を E とするとき、$\sin\angle AEB=\dfrac{[\ セ\ ]\sqrt{[\ ソ\ ]}}{[\ タ\ ]}$ である。

（1998　センター・追）

難 11. 以下の問に答えよ。

(1) 半径 r の円に内接し、1 つの対角線の長さが l であるような四角形の面積の最大値を r と l で表せ。

(2)半径 r の円に内接する四角形の面積の最大値を求めよ。

※ (3)空間内の点 O を頂点とし、四角形 ABCD を底面とする四角錐が $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=1$ を満たしているとする。そのような四角錐の体積の最大値を求めよ。

（2009　早稲田大）

12. 四角形 ABCD において、$\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{BC}=5$, $\mathrm{CD}=t$, $\mathrm{DA}=3-t$ （$0<t<3$）とする。四角形 ABCD は外接円をもつとする。

(1) $\cos\mathrm{C}$ を t で表せ。

(2) 四角形 ABCD の面積 S を t で表せ。

(3) S の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

（名古屋大）

13. 四角形 ABCD は円 O に内接し、$\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{BC}=1$, $\mathrm{CD}=2$, $\mathrm{DA}=3$ である。

(1) BD の長さと$\angle\mathrm{BCD}$ の大きさを求めよ。

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

(3) 円 O の面積を求めよ。

(4) 3 辺 BC , CD , DA に接する円の面積を求めよ。

（2007　上智大）

14. 円に内接する四角形 ABCD において $\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{BC}=2$, $\mathrm{CD}=3$, $\mathrm{DA}=4$ であるとする。 AC と BD の交点を E とする。以下の問いに答えよ。

(1) BD の長さを求めよ。

(2) BE : ED を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を求めよ。

（2011　奈良女子大）

15. 円 O に内接する四角形 ABCD は $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$, $\mathrm{BD}=2\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ を満たすとする。ただし、$\mathrm{AD}>\mathrm{CD}$ とする。

このとき、AC = [ア]$\sqrt{[\ イ\ ]}$, ∠BDC = [ウエ]° であり、円 O の半径は

[オ]$\sqrt{[\ カ\ ]}$となる。また、$\sin\angle BAD = \dfrac{\sqrt{[\ キ\ ]}}{[\ ク\ ]}$である。

さらに AD = [ケ] + $\sqrt{[\ コ\ ]}$ ， CD = [ケ] − $\sqrt{[\ コ\ ]}$であり、四角形 ABCD の面積は [サ]$\sqrt{[\ シ\ ]}$である。

16. 円に内接する四角形 ABCD において、$AB = \sqrt{2}$, $AD = 2\sqrt{2}$, $\angle BCD = 60^\circ$ であるとき、次の問いに答えよ。

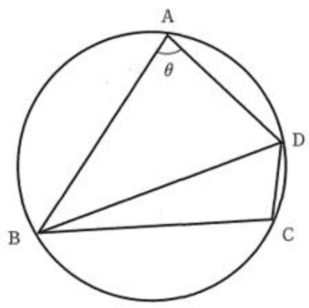
(1) $BD = \sqrt{[\ ア\ ][\ イ\ ]}$である。

(2) 四角形 ABCD の外接円の半径を R とすると、$R = \dfrac{\sqrt{[\ ウ\ ][\ エ\ ]}}{[\ オ\ ]}$である。

(3) BD : CD = 1 : 3 のとき、$BC = \sqrt{[\ カ\ ]}$, $CD = [\ キ\ ]\sqrt{[\ ク\ ]}$である。また、四角形 ABCD の面積を S とすると、$S = \dfrac{[\ ケ\ ]\sqrt{[\ コ\ ]}}{[\ サ\ ]}$である。

（2017　日本医療大）

17. 図のような円に内接する四角形 ABCD において、AB = 3 , BC = 3 , CD = 1 , DA = 2 である。$\angle A = \theta$ とおくとき、次の問いに答えよ。



(1) △ABD に」余弦定理を用いることにより、BD^2 を $\cos\theta$ を含む式で表せ。

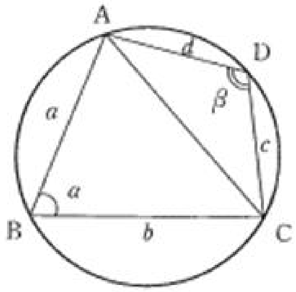
(2) 四角形と中心角の性質より、∠C を θ の式で表せ。

(3) $\cos\theta$ の値を求めよ。

(4) この円の半径 R を求めよ。

（2015　日本大）

18. 図のように円に内接する四角形 ABCD において、$\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{BC}=b$, $\mathrm{CD}=c$, $\mathrm{DA}=d$ とし、$\angle\mathrm{ABC}=\alpha$, $\angle\mathrm{CDA}=\beta$ とする。さらに $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$ とするとき、次の各問いに答えよ。



(1) AC^2 を a , b , α を用いて表せ。

(2) $\cos\alpha$ を a , b , c , d を用いて表せ。

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

（2004　立命館大改）

19. 円に内接する四角形 ABCD に対して、$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ とおく。
四角形 ABCD の面積を S とし、$\angle DAB=A$ とする。

(1) $\cos A$ を a , b , c , d を用いて表せ。

(2) $2s=a+b+c+d$ とおくとき、$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ となることを示せ。

(3) $b=c=6$, $d=1$ とし、S を a の関数として $S(a)$ と表す。$S(a)$ が最大となる a の値を求めよ。

(4) a , b , c , d が(3)の値をとるとき、四角形 $ABCD$ の外接円の半径を求めよ。

（2002　滋賀医科大）

20. 四角形 ABCD が、半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で、辺の BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき、残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

（2006　東京大）

解答

１．(1) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$　(5) $\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$

２．(1) 3　(2) $\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$　(3) $\dfrac{189\sqrt{3}}{76}$　(4) $\dfrac{21\sqrt{19}}{19}$

３．AD = 9，面積 $= \dfrac{45\sqrt{3}}{4}$

４．

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
5	21	7	$\dfrac{5+\sqrt{21}}{16}$	8	$\sqrt{2}$	$\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$

５．(1) $\dfrac{4-\sqrt{7}}{2}$　(2) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{2}$　(3) 略

６．(1) 120°　(2) $16\sqrt{3}$　(3) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(5) $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

７．BC = $\sqrt{2}$，AD = $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

８．$\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}$

９．

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
3	1	5	2	1	5	5	3	1	5	6	1	2	2	6

１０．

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
1	2	0	7	8	1	6	3	7	3	3	3	2	4	3	7

１１．(1) rl　(2) $2r^2$　(3) $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$

１２．(1) $\dfrac{3t}{t+12}$　(2) $\sqrt{-2t^2+6t+36}$　(3) $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

１３．(1) $\angle\mathrm{BCD}=120^\circ$，BD = $\sqrt{7}$　(2) $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$　(3) $\dfrac{7\pi}{3}$　(4) $\dfrac{\pi}{3}$

１４．(1) $\dfrac{\sqrt{385}}{5}$　(2) $1:6$　(3) $\dfrac{26}{35}$

１５．

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
2	6	3	0	2	2	6	4	3	5	3	3

１６．

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
1	4	4	2	3	2	3	2	5	3	2

１７．(1) $13-12\cos\theta$　(2) $180°-\theta$　(3) $\dfrac{1}{6}$　(4) $\dfrac{3\sqrt{385}}{35}$

１８．(1) $a^2+b^2-2ab\cos\alpha$　(2) $\cos\alpha=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$

(3) $\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$

１９．(1) $\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$　(2) 略　(3) 9　(4) $\dfrac{9}{2}$

２０．AB = 4 , DA = 14 または AB =14 , DA = 4