No3 掃過領域を知るための包絡線の考え方

包絡線の求め方

曲線群 $f(x, y, t)=0$ の包絡線の方程式は $f(x, y, t)=0$ と $\dfrac{\partial}{\partial t} f(x, y, t)=0$ から t を消去することで得られる。

COMMENT

難しい表現ですが、要は y を t の関数として、微分をしていくだけです。増減表を完成させ、領域を決定していきます。

《例題》

t が $t \geqq 1$ なる範囲を動くとき、直線 $y=tx-\dfrac{1}{2}t^2$ の通過する領域を図示せよ。

【演習】

1．実数 a が $0 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき、放物線 $y=x^2-2ax+2a^2$ の通りうる範囲を求め、これを xy 平面に上に図示せよ。

2．a が $a>0$ なる値をとるとき、放物線 $y=ax^2+\dfrac{x}{4a}$ の通りうる範囲を求め、これを xy 平面上に図示せよ。

3．xy 平面上に、中心$(a, 1)$，半径 1 の円 C がある。原点より円 C にひいた 2 本の接線の接点を結びつける直線を g とする。a が $a \geqq 1$ である実数値をとるとき、変動する C に対してつくられる直線群 g の存在する範囲を不等式を用いて表し、これを図示せよ。

4．a がすべての実数値をとるとき、直線 $x+ay=a^2+1$ の通る範囲を求め、これを xy 平面上に図示せよ。

５．θ が実数全体を動くとき、xy 平面上の直線 $y = (\cos\theta)\,x + \cos 2\theta$ の通る範囲を求め、図示せよ。

（横浜市大）

６．座標平面上で、点 O(0 , 0) , A(0 , 1) , B(1 , 0) ,C(1 , 1)を考える。点 P が点 B から点 C まで動くとき、正方形 AOBC の辺および内部において、線分 OP の垂直 2 等分線が通る範囲の面積を求めよ。

（早稲田大）

７．点 P が放物線 $y = x^2$ の $x > 0$ の部分を動くとき、P を中心とし、x 軸に接する円の通過範囲を図示せよ。

８．軸は y 軸に平行で、点(t^2 , 0)で x 軸に接し、点(-1 , $1 + t^2$)を通る放物線を考える。t が動くとき、この放物線の通りうる範囲を図示せよ。

（1992 お茶の水大）

９．座標平面上で、次の三つの不等式を同時に満足する点(x , y)の領域を D とする。

$y - 2x - 2 \geqq 0$, $y + 2x - 2 \leqq 0$, $y \geqq 0$

また、実数 k に対し、D 上の点(x , y)で、$x + y = k$ を満足する点の集合を D_k とする。

(1) D_k が空集合とならない k の範囲を求めよ。

(2) k を(1)で求めた範囲内の数とする。点(x , y)が D_k 上を動くとき、xy の最小値を k で表せ。

(3) $u = x + y$, $v = xy$ とする。点(x , y)が D 上を動くとき、点(u , v)の範囲を uv 平面に図示せよ。

（早稲田大）

10. (1) a がすべての実数を動くとき、円 C_a : $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 + 1$ が動く範囲を求めよ。

(2) a が 0 以上のすべての実数を動くとき、円 C_a が動く範囲を図示せよ。

（1992 北海道大）

11. 実数 t に対して、xy 平面上の直線$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問に答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また、接線の座標を求めよ。

(2) t が $t \geqq 1$ の範囲を動くとき、直線の通過する範囲を図示せよ。

（2002 神戸大）

12. s , t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=s+t+1$, $y=s-t-1$ とおく。s , t が $s \geqq 0$, $t \geqq 0$ の範囲を動くとき、点(x, y)の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2) $x=st+s-t+1$, $y=s+t-1$ とおく。s , t が実数全体を動くとき、点(x, y)の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

（2012 東北大）

13. 実数 t に対して xy 平面上の直線 $l_1 : y=2tx-t^2$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 点 P を通る直線 l_1 はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2) t が$|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき、直線 l_1 が通る点(x, y)の全体を図示せよ。

（2006 神戸大）

14. 曲線 C : $y=-x^2-1$ を考える。

(1) t が実数全体を動くとき、曲線 C 上の点$(t, -t^2-1)$を頂点とする放物線

$y=\dfrac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ が通過する領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) D を(1)で求めた領域の境界とする。D が x 軸の正の部分と交わる点を$(a, 0)$とし、$x=a$ での C の接線を l とする。D と l で囲まれた部分の面積を求めよ。

（2010 大阪大）

15. 正の実数 a に対して、座標平面上で次の放物線を考える。

$$\mathrm{C}: y=ax^2+\frac{1-4a^2}{4a}$$

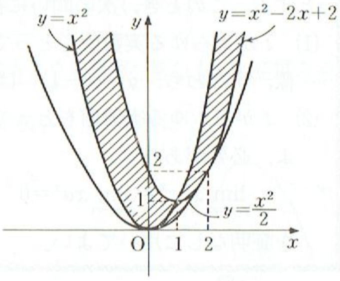
a が正の実数全体を動くとき、C の通過する領域を図示せよ。

（2015 東京大）

解答

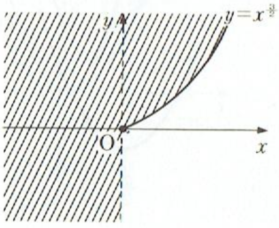
１．

$$\begin{cases} x \leqq 0 \text{ かつ } x^2 \leqq y \leqq x^2-2x+2 \\ \text{および} \\ 0 \leqq x \leqq 1 \text{ かつ } \dfrac{x^2}{2} \leqq y \leqq x^2-2x+2 \\ \text{および} \\ 1 \leqq x \leqq 2 \text{ かつ } \dfrac{x^2}{2} \leqq y \leqq x^2 \\ \text{および} \\ 2 \leqq x \text{ かつ } x^2-2x+2 \leqq y \leqq x^2 \end{cases}$$

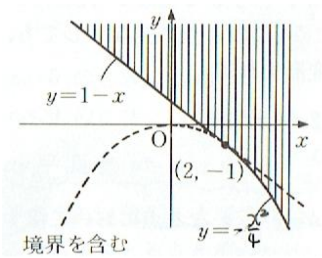


２．

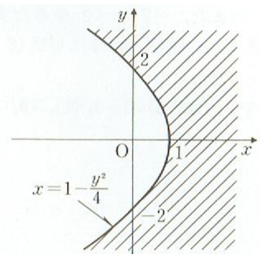
$$\begin{cases} \text{“}x<0 \text{ かつ } y \text{ はすべての実数”} \\ \text{および} \\ \text{“}x=0 \text{ かつ } y=0\text{”} \\ \text{および} \\ \text{“}x>0 \text{ かつ } y \geqq x^{\frac{3}{2}}\text{”} \end{cases}$$



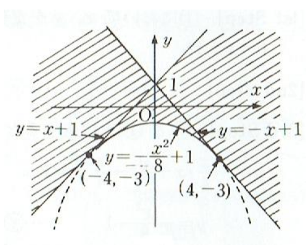
３．$x \leqq 2$ かつ $y \geqq 1-x$　および　$x \geqq 2$ かつ $y \geqq -\dfrac{x^2}{4}$



４．

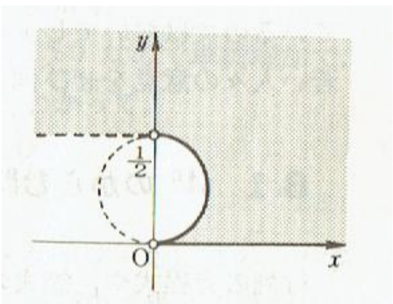


５．

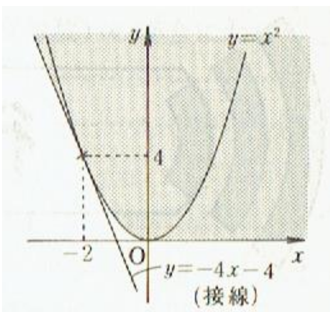


６．$\dfrac{7}{24}$

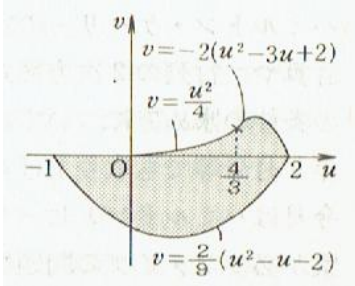
７．



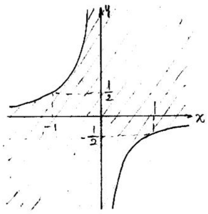
８．



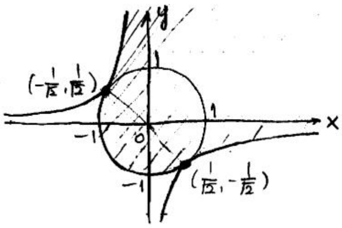
９．（1）$-1 \leqq k \leqq 2$　（2）最小値 $\frac{2}{9}(k^2-k-2)$　（3）



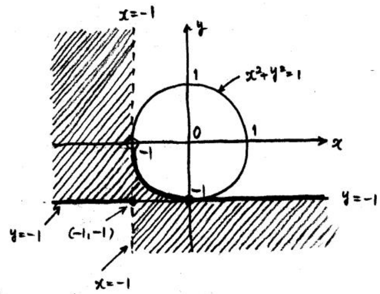
10.（1）



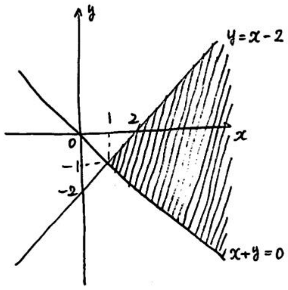
$xy \geqq -\frac{1}{2}$　（2）



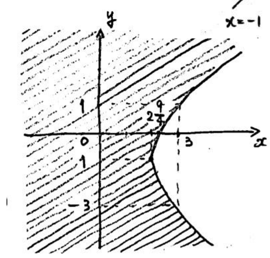
11.（1）$x^2+y^2=1$　接点の座標 $\left(\frac{-t^2+1}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1}\right)$　（2）



12.（1）

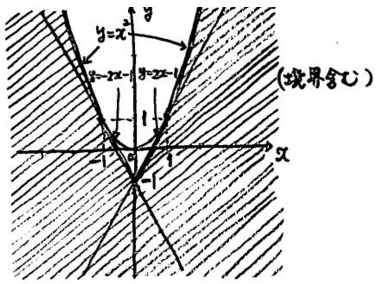


（2）



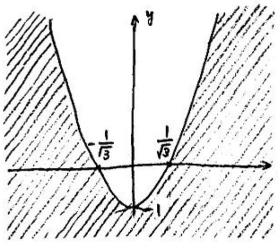
$(x-2) \leqq \frac{1}{4}(y+1)^2$

13.（1）$y=x^2$　（2）



直線は $y=\pm 2x-1$ の２本

14. （1） $y \leqq 3x^2 - 1$ （2） $\dfrac{32\sqrt{3}}{243}$



15,