No4　群数列の問題

《例題１》

奇数列を $1\,|\,3\,,5\,,|\,7\,,9\,,11\,,|\,13\,,15\,,17\,,19\,,|\,21\,,\cdots$ のような群に分ける。

(1) 第 20 群の 10 番目の項を求めよ。

(2) 819 は第何群の何番目の数か。

(3) 第 n 群に含まれる数の総和 S を求めよ。

【演習】

１. 第 n 群が（ $n=1\,,2,\,,3\,,\cdots$ ）である数列 $\{a_n\}$ を、下のように $a_1\,,a_2$ を第 1 群 ，$a_3\,,a_4\,,a_5\,,a_6$ を第 2 群 ，$a_7\,,a_8\,,a_9\,,a_{10}\,,\cdots\,,a_{14}$ を第 3 群とし、第 m 群が 2^m 個の項を含むように区分する。

$$1\,,3\,,|\,5\,,7\,,9\,,11\,,|\,13\,,15\,,17\,,19\,,21\,,23\,,25\,,27\,,|\,29\,,\cdots$$

(1) 第 m 群の最後の項を求めよ。

(2) 第 m 群に含まれる項の総和を求めよ。

(3) 2003 は第 k 群の先頭から p 番目の項であるとして、k および p を求めよ。

（岩手医科大）

２. 1 から順に正の整数を並べて、$1\,,2\,,|\,3\,,4\,,5\,,6\,,|\,7\,,8\,,9\,,10\,,11\,,12\,,|\,13\,,14\,,\cdots$ のように第 n 群が $2n$ 個の数を含むように分ける。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 10 群の最後の数を求めよ。また、一般に第 n 群の最後の数を求めよ。

(2) 2010 が第 p 群の q 番目の数となるような $p\,,q$ を求めよ。

(3) 第 n 群の最初の数を求めよ。また、第 n 群に含まれるすべての数の和 S_n を求めよ。

(4) 第 n 群に含まれるすべての奇数の和 T_n を求めよ。また、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$ を求めよ。

（2010 関西学院大）

３. 1 から順に並べた自然数を $1\,,|\,2\,,3\,,4\,,|\,5\,,6\,,7\,,8\,,9\,,10\,,11\,,12\,,13\,,|\,14\,,15\,,\cdots$ のように、第 n 群（ $n=1\,,2,\,,3\,,\cdots$ ）が 3^{n-1} 個の数を含むようにする。

(1) 第 n 群の最初の数を求めよ。

(2) 5000 は第何群の第何番目にあるか。

（佐賀大）

４．右の表のように、奇数を順々に並べていく。

(1) n 行目の左端の数を n の式で表せ。

(2) 1987 は何行目の左端から何番目にあるか。

(3) 1987 がある行にある数の総和を求めよ。

1
3　5
7　9　11
13　15　17　19
21　23　25　………

（1987 東京理科大）

５．次のように自然数を階段状に並べる。

1
2　3
4　5　6
7　8　9　10
11　12　13　14　15
…………

上から n 段目（$n = 1 , 2, , 3$, … ）に並ぶ数のうち左端にあるものを a_n , 上から n 段目に並ぶ総和を S_n とするとき、以下の空欄をうめよ。

(1) $a_n =$［ イ ］　　(2) $S_n =$［ ロ ］　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} a_k =$［ ハ ］

（2008　会津大）

６．一般項が $a_k = 2k - 1$ である数列に、次のような規則で縦棒で仕切りを入れて区分けする。その規則とは、区分けされた n 番目の部分（これを第 n 群と呼ぶことにする）が $2n - 1$ 個の項からなるように仕切るものである。

1 | 3 , 5 , 7 | 9 , 11 , 13 , 15 ,17 | 19 , 21 , 23 , 25 , 27 , 29 , 31 | 33 , 35 , 37 , …

このとき、例えば、第 3 群は、9 , 11 , 13 , 15 , 17 の 5 つの項からなるので、第 3 群の初項は 9 , 末項は 17 , 中央の項は 3 項目の 13 である。また、第 3 群の総和は $9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 65$ であり、15 は第 3 群の第 4 項である。次の問いに答えよ。

(1) 第 n 群の初項を n の式で表せ。

(2) 第 n 群の中央の項を n の式で表せ。

(3) 第 n 群の項の総和 $S(n)$ を n の式で表せ。

(4) 第 1 群から第 n 群までの中央の項の総和を n の式で表せ。

(5) 2013 は第何群の第何項か。

（2013　早稲田大）

7．自然数を 2 乗した列を、つぎのように奇数個ずつの群に分ける。以下の問に答えよ。

$$\{1\},\{4,9,16\},\{25,36,49,64,81\},\ \cdots$$

(1) 625 は第何群の何番目の数か。

(2) 第 n 群の最後の数を n の式で表せ。

(3) 第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(4) 第 n 群にあるすべての数の和を n の式で表せ。

（2012　宇都宮大）

8．自然数を 1 から順に並べ、第 n 群が 3^{n-1} 個の自然数を含むように分割する。例えば、第 1 群は$\{1\}$であり、第 2 群は$\{2,3,4\}$である。次の問いに答えよ。

(1) 第 n 群の最初の数を求めよ。

(2) 第 n 群に含まれるすべての自然数の和を求めよ。

(3) 6^{20} は第何番目の群に含まれるか。ただし、$\log_{10}2=0.3010$, $\log 10\ 3=0.4771$ とする。

（2013 県立広島大）

9．自然数の列を、次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$|\,1,2,3,|\,4,5,6,7,8,|\,9,10,11,12,13,14,15,|\,16,\ \cdots$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 n 群（$n=1,2,,3,\ \cdots$ ）の最初の自然数と第 n 群の最後の自然数を求めよ。

(2) 第 n 群に含まれるすべての数の和 S_n を求め、不等式 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}<\dfrac{3}{2}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(3) 2014 が第何群の何番目の自然数であるかを答えよ。

(4) 自然数 k の平方根の整数部分を a_k とする。このとき、a_3 および a_k の第 15 項までの部分和、第 2014 項までの部分和を求めよ。

（2014 関西大）

10. $a_1=-400$ から 2 ずつ増えて行く数列$\{a_n\}$をつぎのような群に分け、第 n 群には n 個の数が入るようにする。

$$a_1\,|\,a_2,a_3\,|\,a_4,a_5,a_6\,|\,a_7,a_8,a_9,a_{10}\,|\ \cdots$$

ただし、$a_1=-400$, $a_2=-398$, $a_3=-396$, $\cdots$ である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 1 群のから第 9 群までに入る数の個数を答えよ。

(2) 第 10 群の最初の数を答えよ。

(3) 第 10 群に入るすべての数の和を答えよ。

(4) 第 n 群の最初の数を n を使って表せ。

(5) $a_k = 0$ となる k を答えよ。

(6) $a_k = 0$ となる a_k は第何群の第何番目の項か。

（2016 東京理科大）

《例題２》

次のような群数列を考える。

$$1\,,\,|\,1\,,\,3\,,\,|\,1\,,\,3\,,\,5\,,\,|\,1\,,\,3\,,\,5\,,\,7\,,\,|\,1\,,\,\cdots$$

(1) 第 100 項の数を求めよ。

(2) 第 n 群から第 m 群（$n < m$）までの項の総数を求めよ。

【演習】

１．有理数列（※）$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \cdots$ について、次の問いに答えよ。

(1) 数列（※）の $\dfrac{37}{50}$ は第何項になるか。

(2) 数列（※）の第 1000 項の数を求めよ。

(3) 初項から第 1000 項までの和を求めよ。

（中央大）

２．数列 $\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \cdots, \dfrac{n}{n}, \cdots$ について

(1) $\dfrac{99}{100}$ という値が初めて現れるのは第何項か。

(2) 第 2005 項の値を求めよ。

（2005 群馬大）

３．2 の累乗を分母とする既約分数を次のように並べた数列について、

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \cdots, \frac{15}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$$

(1) 分母が 2^n となっている項の和を求めよ。

(2) 初項から第 1000 項までの和を求めよ。

（岩手大）

４．数列 $1, 1, 4, 7, 1, 4, 7, 10, 13, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 1, 4, 7, \cdots$ の規則性を推測し、次の問いに答えよ。

(1) 8 回目に現れる 10 は第何項か。

(2) 初項から k 回目の 10 までの項の和を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの和を S_n とするとき、$S_n > 2017$ となる最小の n を求めよ。

（2017 徳島大）

５．数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \cdots$ がある。このとき次の問いに答えよ。

(1) 初めて $\frac{15}{16}$ が現れるのは第何項目か求めよ。

(2) この数列の第 52 項目の数を求めよ。

(3) 初項から第 200 項目までの数列の和を求めよ。

(2018 高崎経済大)

６．数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}, \cdots$ を次のような群に分ける。

$$\frac{1}{1} \left| \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right| \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \Big| \cdots \Big| \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} \Big| \cdots\cdots$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 28 項に入るすべての項の和を求めよ。

(2) 第 n 群の最初の数が第何項かを求めよ。

(3) 第 2016 項を求めよ。

(2016 滋賀大)

７．分母が 2 の累乗 ，分子が奇数であって、0 より大きく 1 より小さい分数を次のように並べた数列を考える。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}, \frac{1}{32}, \frac{3}{32} \cdots$$

以下の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{2^8}$ は第何項であるか。

(2) 第 255 項を求めよ。

(3) 初項から第 255 項までの和を求めよ。

（2008 北見工業大）

８．次の数列を考える。

$$1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{27},\frac{1}{27},\frac{1}{27}\cdots$$

(1) この数列の第 670 項を答えよ。

(2) この数列の初項から第 2182 項までの和を答えよ。

（2014 慶応大）

９．$1, 5, 5^2, \cdots, 5^{k-1}$ を順番に並べて得られる次の数列を考える。

$$1, 1, 5, 1, 5, 5^2, 1, 5, 5^2, 5^3, 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, \cdots$$

(1) 第 40 項を求めよ。

(2) 初項から第 777 項までに 1 である項が何項あるか答えよ。

(3) 自然数 n に対し、初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n \geqq 1000$ を満たす最小の n を答えよ。

（2017 東京理科大）

10. 自然数 k に対して、分母が $2k+1$, 分子が k 以下の自然数の平方からなる分数を考える。このような分数を、分母の小さい順に、分母が同じ場合には分子の大きい順に並べてできる数列をつくり、下のように群に分ける。

$$\frac{1}{3}\left|\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right|\frac{9}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{7}\left|\frac{16}{9},\frac{9}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{9}\right|\frac{25}{11},\frac{16}{11},\frac{9}{11},\frac{4}{11},\frac{1}{11}\left|\frac{36}{13},\frac{25}{13},\cdots\cdots\right.$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 n 群の最初の項を n を用いて表せ。

(2) $\dfrac{36}{23}$ が第何項になるか求めよ。

(3) 第 n 群の項の総和を S_n とする。$\sum_{k=1}^{n} S_k$ の値 S を n を用いて表せ。

(4) 初項から第 376 項までの和を求めよ。

（2018 静岡大）

解答

例題１　(1) 399　(2) 第 29 群の 4 番目　(3) n^3

１．(1) $2^{m+2}-5$　(2) $3\cdot4^m-4\cdot2^m$　(3) $k=9$, $p=492$

２．(1) 110　$n(n+1)$　(2) $p=45$, $q=30$　(3)　$n(2n^2+1)$　(4)　2

３．(1) $\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$　(2) 第 9 群の 1720 番目

４．(1) n^2-n+1　(2) 45 行目の左から 4 番目　(3) 91125

５．イ $\dfrac{n^2-n+2}{2}$　ロ $\dfrac{n^3+n}{2}$　ハ $\dfrac{1}{3}$

６．(1) $2n^2-4n+3$　(2) $2n^2-2n+1$　(3) $(2n-1)(2n^2-2n+1)$

(4) $\dfrac{n}{3}(2n^2+1)$　(5)　第 32 群の 46 項

７.(1) 第5群の9番目　(2) n^4　(3) $(n^2-2n+2)^2$　(4) $\dfrac{1}{3}(2n-1)(3n^4-6n^3+10n^2-7n+3)$

８．(1) $\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$　(2) 3^{2n-2}　(3) 第 34 番目

９．(1) 最初 n^2　最後 n^2+2n　(2)　$S_n=n(n+1)(2n+1)$　$n=7$

(3) 第 44 群の 79 番目　(4) $a_3=1$　第 15 項まで 34　第 2014 項まで 59290

10.　(1) 45 個　(2)　-310　(3) -3010　(4) $n^2-n-400$　(5) $k=201$

(6) 第 20 群の第 11 番目

例題２　(1) 17　(2) $\dfrac{1}{2}(m+n)(m-n+1)$

１．(1) 第 1213 項　(2) $\dfrac{10}{46}$　(3) $\dfrac{22825}{46}$

２．(1) 5049 項　(2) $\dfrac{52}{63}$

３．(1) 2^{n-2}　(2) $\dfrac{500753}{1024}$

４．(1) 第 85 項　(2) $2k^3+\dfrac{11}{2}k^2+\dfrac{9}{2}k+23$　(3) $n=108$

５．(1) 第 126 項　(2) $\dfrac{13}{10}$　(3) 195

６．(1) $\dfrac{29}{2}$ (2) 第 $\dfrac{n(n-1)}{2}+1$ 項 (3) $\dfrac{63}{63}$

７．(1) 128 (2) $\dfrac{255}{256}$ (3) $\dfrac{255}{2}$

８．(1) $\dfrac{1}{729}$ (2) $\dfrac{1822}{243}$

９．(1) 5^3 (2) 39 個 (3) $n = 18$

10. (1) $\dfrac{n^2}{2n+1}$ (2) 第 61 項 (3) $S = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{18}$