No7　放物線の興味ある性質

《例題》

放物線 $y = ax^2 - bx + b$ と直線 $y = a^2x$ を考える。この放物線と直線は 2 交点 P , Q をもち、P と Q の x 座標の差の絶対値は1であるという。ただし $a > 0$ とする。放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を d とする。

(1) d を a を用いて表せ。

(2) d を最大にする a と b の値を求めよ。

（1991 大阪大）

１．座標平面において 2 つの放物線 A : $y = s(x-1)^2$ と B : $y = -x^2 + t^2$ を考える。 ただし $s,\ t$ は実数で、$0 < s$ ， $0 < t < 1$ をみたすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし、放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき、$\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$ の最大値を求めよ。

（2017 東京大）

２．座標平面上の 2 つの放物線 A : $y = x^2$, B : $y = -x^2 + px + q$ が点$(-1, 1)$で接している。ここで、p と q は実数である。さらに、t を正の実数とし、放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$ ， y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1) p と q の値を求めよ。

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$とする。ただし、A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。$S(t)$を求めよ。

(3) $t > 0$ における $S(t)$の最大値を求めよ。

（2016 東京大）

３．a を正の実数, b と c を実数とし、2 点 P$(-1, 3)$ ， Q$(1, 4)$を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C とおく。C 上の 2 点 P , Q における C の接線をそれぞれ l_1 , l_2 とする。

(1) b の値を求め、c を a で表せ。

(2) l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。

(3) 放物線 C と接線 l_1 , l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。

（2011 北海道大）

４． a を正の実数とし、2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。
(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ.
(2) 2 つの放物線 C_1 , C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。

（2010 北海道大）

５． $0 < a < 1$ とする。曲線 $y = 1 - x^2$ と $y = \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)x^2$ の第 1 象限内での交点を A とし、A から x 軸に下ろした垂線の足を B とする。また、原点を O とし、線分 OB と線分 AB と曲線 $y = \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)x^2$ とで囲まれた図形の面積を S とする。このとき、次の問いに答えよ。
(1) 点 B の座標を求めよ。
(2) 面積 S を、a を用いて表せ。
(3) 面積 S を最大にする a の値を求めよ。

（1999 北海道大）

６． t≧0 に対し、曲線 $\mathrm{y} = x^2 - t^2$ (x≧0)と x 軸 , y 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の全面積を $S(t)$とおく。
(1) $S(t)$を求めよ.
(2) t が変化するとき、$S(t)$の最小値を求めよ。

（1982 北海道大）

７． 座標平面上で、点(1 , 2)を通り傾き a の直線と放物線 $y = x^2$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$とする。a が 0≦a≦6 の範囲を変化するとき、$S(a)$を最小にするような a の値を求めよ。

（2010 京都大）

８． xy 平面上で、放物線 $C : \mathrm{y} = x^2 + x$ と、直線 $l : y = kx + k - 1$ を考える。このとき次の問に答えよ。
(1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ。
(2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P , Q とし、線分 PQ の長さを L, 線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする。k が(1)で定まる範囲を動くとき、$\frac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ。

（2003 京都大）

９．放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P , Q があって、この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に $\dfrac{9}{2}$ であるとき、PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。

（1999 京都大）

10. k を実数とする。3 次関数 $y=x^3-kx^2+kx+1$ が極大値と極小値をもち、極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき、k の値を求めよ。

（2019 九州大）

11. 定数 $a<1$ に対し、放物線 $C_1 : y=2x^2+1$, $C_2 : y=-x^2+a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1 , C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) C_1 と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1 , C_2 と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき、$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

（2017 九州大）

12. 放物線 $y=x^2$ 上の点 P(t , t^2)から直線 $y=x$ へ垂線を引き、交点を H とする。ただし、$t>1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を R とするとき、三角形 PRH の面積を t を用いて表せ。

(3) $x \geqq 1$ の範囲において、放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき、S_1 を t を用いて表せ。

(4) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき、t の値を求めよ。

（2011 九州大）

13. 曲線 $y=x^2$ の点 P(a , a^2)における接線と点 Q(b , b^2)における接線が点 R で交わるとする。ただし、$a<0<b$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を PRQS とする。折れ線 PS 曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle PRQ = 90^\circ$ を満たしながら P と Q が動くとき、(2)で求めた面積の最小値を求めよ。

（2009 九州大）

14. b , c を実数, q を正の実数とする．放物線 P : $y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき、放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いて表せ。

（2017 大阪大）

解答

１． $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

２． (1) $p=-4$, $q=-2$ (2) $\begin{cases} 0<t<\dfrac{5}{2}\text{のとき、}S(t)=\dfrac{8}{3}\left(-t^2+\dfrac{5}{2}t\right)^{\frac{3}{2}} \\ t\geqq\dfrac{5}{2}\text{のとき、}S(t)=0 \end{cases}$ (3) $\dfrac{125}{24}$

３． (1) $b=\dfrac{1}{2}, c=\dfrac{7}{2}-a$ (2) $\left(0, -2a+\dfrac{7}{2}\right)$ (3) $a=\dfrac{3}{2}$

４． (1) $y=2(1-a)x-(1-a)^2$ (2) $\dfrac{2}{3}a^3$

５． (1) $(a, 0)$ (2) $\mathrm{S}=\dfrac{1}{3}a(1-a^2)$ (3) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

６． (1) $S(t)=\begin{cases} \dfrac{4t^3-3t^2+1}{3} & (0<t<1) \\ t^2-\dfrac{1}{3} & (t\geqq 1) \end{cases}$ (2) $\dfrac{1}{4}$

７． $a=2$

８． (1) $k<-3$, $k>1$ (2) $0<\dfrac{S}{L^3}<\dfrac{\sqrt{2}}{24}$

９． $y=x^2+\dfrac{\sqrt[3]{36}}{4}$

10． $k=-\dfrac{3}{8}$

11． (1) $y=\pm\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{1-a}}{3}x+\dfrac{a+2}{3}$ (2) $\dfrac{S_2}{S_1}=4$

12． (1) $\left(\dfrac{t+t^2}{2}, \dfrac{t+t^2}{2}\right)$ (2) $\dfrac{(t^2-t)^2}{4}$ (3) $\dfrac{\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}}{}$ (4) $t=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

13． (1) $\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b}{2}, ab\right)$ $\triangle\mathrm{PRQ}=-\dfrac{1}{4}(b-a)^3$ (2) $\dfrac{5}{12}(b-a)^3$ (3) $\dfrac{5}{12}$

14． $S=\dfrac{4}{3}q\sqrt{q}$