

## No8 水の問題

## 《例題》

曲線  $y = x^2$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) を  $y$  軸の周りに回転させてできる容器に毎秒  $\pi \text{ cm}^3$  の割合で水を注ぐ。長さの単位は  $\text{cm}$  とする。

- (1) 4 秒後の水深を求めよ。
- (2) 4 秒後の水面が上昇する速度を求めよ。
- (3) 4 秒後の水面の面積の増加速度を求めよ。
- (4) 容器の底にある排水口を開けると、水深が  $h$  のときに毎秒  $\sqrt{h} \text{ cm}^3$  の割合で排水される。満水の容器が空になるまでの時間  $T$  を求めよ。

## 【演習】

1.  $xy$  平面を水平にとり、 $xz$  平面において関数  $z = f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ x^2 - 1 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

で定義する。曲線  $z = f(x)$  を  $z$  軸の周りに回転してできる容器について考える。ただし、この容器に関する長さの単位は  $\text{cm}$  である。この容器に毎秒  $\pi \text{ cm}^3$  の割合で水を注ぐとき、

- (1) 注水し始めてからこの容器がいっぱいになるまでの時間は ( ) 秒である。
- (2) 注水し始めてから 4 秒後の水面が上昇する速さは ( )  $\text{cm}/\text{秒}$  である。
- (3) 注水し始めてから 4 秒後の水面の半径が増大する速さは ( )  $\text{cm}/\text{秒}$  である。

(東洋大)

2. 曲線  $y = x^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) を  $y$  軸の周りに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻  $t = 0$  に排水口を開けて排水を開始する。時刻  $t$  において容

器に残っている水の深さを  $h$ 、体積を  $V$  とする。 $V$  の変化率  $\frac{dV}{dt}$  は  $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$  で与えられる。

- (1) 水深  $h$  の変化率  $\frac{dh}{dt}$  を  $h$  を用いて表せ。
- (2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間  $T$  を求めよ。

(2003 北海道大)

3. 内部の形が半径 10cm の半球形の容器（へりの大円が上部で水平におかれている）に水を満たし、ここから水をくみ出すのに、水面の下がる速さを  $v$  cm/秒（一定）にしたい。 $t$  秒後において水をくみ出す速さはどれだけか。

（1974 京都大）

4. 放物線  $y = x^2$  を  $y$  軸の周りに回転してできる形の容器に水を注ぐとき、注ぎ始めてからの時間  $t$  における水面の高さを  $h$  として、次の問いに答えよ。

(1) 注入速度を 1 とするとき、 $t$  を  $h$  の関数として表せ。

(2) 注入速度を  $t^3$  とするとき、水面の高さが  $h$  のときの水面の上昇速度を  $h$  で表せ。

（大分大）

5.  $H > 0, R > 0$  とする。空間内において、原点  $O$  と点  $P(R, 0, H)$  を結ぶ線分を  $z$  軸の周りに回転させてできる容器がある。この容器に水を満たし、原点から水面までの高さが  $h$  のときに単位時間あたりの排水量が  $\sqrt{h}$  となるように水を排水する。すなわち、時刻  $t$  までに排水された水の総量を  $V(t)$  とおくと、 $\frac{dV(t)}{dt} = \sqrt{h}$  が成り立つ。このときすべての水を排水するのに要する時間を求めよ。

（2006 京都大後）

6.  $0 \leq x \leq 1$  において、微分可能で増加する関数  $y = f(x)$  ( $f(0) = 0, f(1) = 1$ ) がある。曲線  $y = f(x)$  を  $y$  軸の周りに 1 回転して得られる容器に、毎秒  $k$  の割合で水を注ぐ。注ぎ始めてから  $t$  秒後の深さを  $y$  として、 $t$  秒後の水面の面積の増える速度は  $y^{-1}$  であるという。  $f(x)$  を求めよ。

（岐阜薬大）

7. (1) 動き始めてから  $t$  時間たった瞬間には 1 時間に  $3\pi t^2 \text{ m}^3$  の割合で水をはき出すポンプがある。このポンプが動き始めてから 4 時間後までにどれだけの水をはき出すか。

(2) このポンプで内のりの直径 8m の半球状の容器に深さが  $h$  m になるまで注水するには何時間を要するか。

(3) 注水し始めてから 3 時間たったときの水面の上昇速度を求めよ。

（1961 北海道大）

8. (1)  $y = (x^2 - 2) + |x^2 - 2|$  …… ① のグラフを描け。

(2) ①が  $y$  軸のまわりに回転してできる回転面の囲む体積  $V$  を、 $y \leq h$  の範囲で求めよ。

(3)  $y$  軸を鉛直にしたとき、(2)の回転面を内壁とする容器に、毎秒  $1\text{cm}^3$  の割合で水を注入すれば、 $t$  秒後の水面の高さおよび水面の上昇速度はどうか。なお座標の単位は  $\text{cm}$  とする。

(1963 九州大)

9. 深さ  $h$  の容器がある。底は半径  $a (> 0)$  の円板，側面は  $x = f(y)$ ， $0 \leq y \leq h$  のグラフを  $y$  軸のまわりに回転したものである。ただし  $f(y)$  は正の連続関数で  $f(0) = a$  とする。この容器に単位時間当り  $V$  (一定) の割合で水を入れたとき、 $T$  時間後に一杯になり、しかも  $t (< T)$  時間後の水面の面積は  $Vt + \pi a^2$  であった。関数  $f(y)$  を決定し、 $T$  を求めよ。

(1995 京都大)

10. 単位を  $\text{cm}$  とする。 $y = ax + b$ ， $0 \leq y \leq 8$  で表される曲線を  $y$  軸のまわりに回転させて作った曲面を側面にもつような底の平らな容器がある。ただし、上面の半径は  $1\text{cm}$ ，底面の半径は  $5\text{cm}$  である。

(1) この容器に深さ  $6\text{cm}$  まで水を入れたときの水の体積を求めよ。

(2) この容器に毎秒  $k\text{cm}^3$  の割合で水を入れるとき、深さ  $3\text{cm}$  のときの水面の上昇速度を求めよ。

(1988 京都大)

11. 曲線  $y = e^x$  の  $0 \leq x \leq 3$  に対応する部分を  $y$  軸のまわりに回転してできる容器がある。これに毎秒  $a$  の割合で上から水を注ぐ。

(1) この容器に水がいっぱいになるのは何秒後か。

(2) この水面の上昇速度が毎秒  $\frac{a}{4\pi}$  になった瞬間の水深を求めよ。

(2000 首都大東京)

12. 直円錐状の容器が、容器の頂点を下にし、軸を鉛直にして置かれている。ただし、上面の円の半径は容器の深さの  $\sqrt{2}$  倍になっている。この容器に毎秒  $w\text{cm}^3$  の割合で水を注ぐとき、水の量が  $v\text{cm}^3$  になった瞬間における水面の上昇する速度を求めよ。またそのときの水面の面積の増加する速度を求めよ。

(豊橋技術大)

解答

例題 (1)  $2\sqrt{2}$  cm (2)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  cm/秒 (3)  $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$  cm<sup>2</sup>/秒 (4)  $\frac{16}{3}\pi$  秒

1. (1) 40 (2)  $\frac{1}{3}$  (3)  $\frac{\sqrt{3}}{18}$

2. (1)  $-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$  (2)  $\frac{2}{3}\pi$

3.  $\pi v(100 - v^2 t^2)$

4. (1)  $t = \frac{\pi}{2} h^2$  (2)  $\frac{dh}{dt} = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} \sqrt{h}$

5.  $\frac{2}{5}\pi R^2 \sqrt{H}$

6.  $f(x) = e^{2k}$

7. (1)  $64\pi$  m<sup>3</sup> (2)  $t = \sqrt[3]{4h^2 - \frac{1}{3}h^3}$  時間 (3)  $\frac{9}{5}$  m

8. (1) 略 (2)  $V = \frac{\pi}{4}(h^2 + 8h)$  (3)  $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\pi(4\pi + t)}}$

9.  $f(y) = ae^{\frac{y}{2}}$   $T = \frac{\pi a^2 (e^h - 1)}{V}$   $\pi(5e^3 - 2)/a$

10. (1)  $\frac{75}{2}\pi$  cm<sup>3</sup> (2)  $\frac{k}{4\pi}$  cm/秒

11. (1)  $\frac{(5e^3 - 2)\pi}{a}$  (2)  $e^2 - 1$

12.  $\frac{dh}{dt} = \frac{w}{2\pi} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2\pi}{3v}\right)^2}$   $\frac{dS}{dt} = \frac{4w^3\sqrt{\pi}}{\sqrt[3]{12v}}$