No9　面積評価

《例題》

2 以上の自然数 n に対して、次の不等式が成立することを示せ。

$$1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

【演習】

１．n は 2 以上の自然数とする。数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2$$

（1991 北海道大）

２．以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とするとき、不等式 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。

（2015 九州大）

３．(1) $0<x<a$ を満たす実数 x , a に対し、次の式を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2) (1)を利用して、$0.68<\log 2<0.71$ を示せ。ただし、$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

（2007 東京大）

４．e を自然対数の底とする。$e \leqq p<q$ のとき、不等式

$$\log(\log q)-\log(\log p)<\frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ。

（2001 名古屋大）

５．n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_1^n x\log x\,dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)<\sum_{k=1}^{n}k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left\{(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot n^n)^{\frac{1}{n^2\log n}}\right\}$ を求めよ。

（2009 琉球大）

６．(1) 自然数 n に対して、次の不等式を証明せよ。

$$n\log n-n+1\leqq\log(n!)\leqq(n+1)\log(n+1)-n$$

(2) 次の極限の収束、発散を調べ、収束するときにはその極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{n\log n-n}$$

（首都大東京）

７．自然数 m , n は $2\leqq m<n$ を満たすとする。

(1) 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n+1-m}{m(n+1)}<\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<\frac{n+1-m}{n(m-1)}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{3}{2}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq 2$$

(3) (2)の不等式をより精密にした、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{29}{18}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq\frac{61}{36}$$

（2013 日本医科大）

８．関数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x>0$)について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の導関数を求めよ。

(2) k を自然数とするとき、不等式 $\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}f(x)\,dx<\frac{1}{\sqrt{k}}$ が成り立つことを示せ。

(3) $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}}$ を超えない最大の整数を求めよ。

（2018 愛知医科大）

９．すべての自然数 n に対して、

$$\sqrt{n^2+1}-1<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

が成り立つことを示せ。

（1956 山口大）