漸　化　式

1. 初項 $a_1=1$ と漸化式 $a_n=2a_{n-1}+n-3$（$n=2,3,\cdots$）によって表される数列$\{a_n\}$について次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の第 k 項から第 $2k$ 項までの$(k+1)$個の和 P_k を求めよ。

(3) 整数 $k>1$ を選んだとき $2^{k-1}-a_k\leqq 25$ かつ $2^{2k}-2^{k-1}-P_k\leqq 25$ が成立しない k の範囲を示せ。

（2004　九州大）

2. 数列$\{a_n\}$が、$a_1=6$, $a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$（$n=1,2,3,\cdots$）を満たすとき

(1) 一般項 a_n を求めよ。　　(2) $\sum_{n=1}^{m}a_n$ を求めよ。

（1991　新潟大）

3. 数列$\{a_n\}$の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が $S_1=0$, $S_{n+1}-3S_n=n^2$（$n=1,2,3,\cdots$）を満たす。

(1) 数列$\{a_n\}$が満たす漸化式を a_n と a_{n+1} の関係式で表せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

（2004　徳島大）

4. 数列$\{a_n\}$を $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2+ka_n}$（$n=1,2,3,\cdots$）で定める。ただし、$k>0$ とする。

(1) a_2 , a_3 , a_4 , a_5 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

（1994　大分大）

5. 数列$\{a_n\}$は $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{7a_n-4}{9a_n-5}$（$n=1,2,3,\cdots$）を満たす。

(1) $a_{n+1}-\alpha=\frac{a_n-\alpha}{\beta(a_n-\alpha)+\gamma}$ を満たす定数 α,β,γ の値を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

（2012　滋賀大）

6. 数列$\{a_n\}$は $a_1=a>0$, $a_{n+1}=16a_n{}^3$（$n=1,2,3,\cdots$）を満たすものとする。

(1) 数列$\{b_n\}$を $b_n=\log_2 a_n$ とするとき、$\{b_n\}$の一般項を a と n を用いて表せ。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を a と n を用いて表せ。

(3) すべての n について $a_n=a$ をみたすような a の値を求めよ。

（2016　札幌医科大）

7. $a_1=1$, $b_1=3$, $a_{n+1}=3a_n+b_n$, $b_{n+1}=2a_n+4b_n$ で定められている数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$がある。

(1) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$を満たす$\alpha,\beta$の組を 2 組求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項を求めよ。

（2002　三重大）

8. 条件 $a_1=1$, $a_2=2$, $3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$（$n=1,2,3,\cdots$）によって定められている数列$\{a_n\}$について、次の問いに答えよ。

(1) 第 3 項 a_3 を求めよ。

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくとき、b_{n+1} を b_n で表せ。

(3) 一般項 a_n を n の式で表せ。

（2009　早稲田大）

9. n 段の階段を上るのに、1 歩で 1 段, 2 段, または 3 段を上ることができるとする。この階段の登り方の総数を a_n とおく。たとえば $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$ である。

(1) a_4 , a_5 の値を求めよ。

(2) a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , a_{n+3}（$n\geqq 1$）の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) a_{10} の値を求めよ。

（2011　千葉大）

10. 先頭車両から順に 1 から n までの番号がついた n 両編成の列車がある。ただし $n\geqq 2$ とする。各車両を赤色, 青色, 黄色のいずれか 1 色で塗るとき、隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

（2005　京都大）

解答

1．(1) $a_n=-n+1+2^{n-1}$　(2) $P_k=\frac{(k+1)(-3k+2)}{2}+2^{k-1}(2^{k+1}-1)$　(3) $k=2$, 3 , $k\geqq 27$

2．(1) $a_n=(2n+1)\cdot 2^n$　(2) $\sum_{n=1}^{m} a_n=(2m-1)\cdot 2^{m+1}+2$

3．(1) $a_{n+1}-3a_n=2n-1$　(2) $a_n=-n+3^{n-1}$

4．(1) $a_2=\frac{1}{2+k}$, $a_3=\frac{1}{4+3k}$, $a_4=\frac{1}{8+7k}$, $a_5=\frac{1}{16+15k}$　(2) $a_n=\frac{1}{2^{n-1}+(2^{n-1}-1)k}$

5．(1) $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=9$, $\gamma=1$　(2) $a_n=\frac{2n-1}{3n-2}$

6．(1) $b_n=-2+\log_2(4a)\times 3^{n-1}$　(2) $a_n=\frac{(4a)^{3^{n-1}}}{4}$　(3) $a=\frac{1}{4}$

7．(1) $(\alpha,\beta)=(1,5)$, $\left(-\frac{1}{2},2\right)$　(2) $a_n=\frac{4}{3}\cdot 5^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$, $a_n=\frac{4}{3}\cdot 5^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$

8．(1) $\frac{8}{3}$　(2) $b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n$　(3) $a_n=4-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

9．(1) $a_4=7$, $a_5=13$　(2) $a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$　(3) 274

10. $\frac{1}{3}\{2^{n+2}-(-1)^{n+2}\}$ 通り