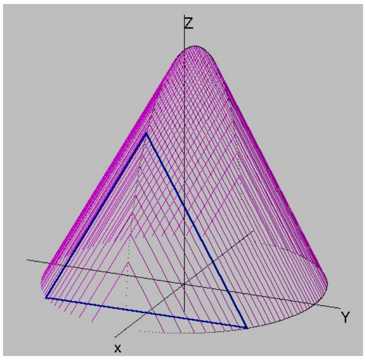
発展演習

非回転体の体積計算

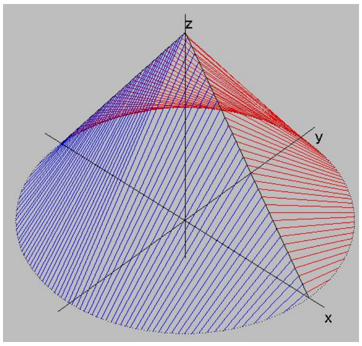
1．座標空間の $z \geqq 0$ の部分に、底面が xy 平面上の円 $x^2+y^2 \leqq r^2$ $(0<r)$ で表されているような立体がある。この立体の x 軸に垂直な平面による切り口の面積はいつも正三角形となっているという。この立体の体積を求めよ。



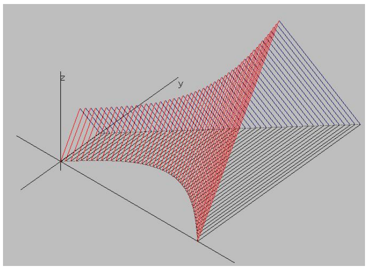
2．平面上に O を中心とする半径 a の円をかいて、直径 AB 上に点 H をとる。点 H を通り AB に垂直な弦を QR とし、さらに、図のように平面に垂直な PH を高さとする二等辺三角形 PQR をつくる。

いま条件 $PH+HO=a$ を保ちながら点 H を A から B まで動かす。このとき、三角形 PQR が動いてできる立体の体積 V を求めよ。

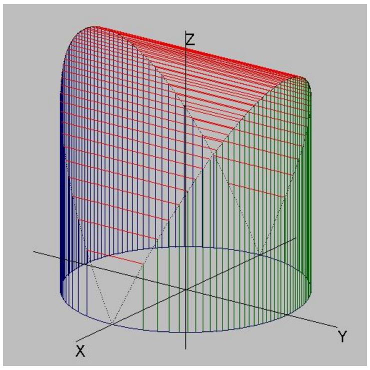
（千葉大）



3．区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において、2 点 $P(x, 1+x)$, $Q(x, \sin x)$ を考え、線分 PQ を1辺とする正三角形 PQR を R の z 座標が正になるように、x 軸に垂直な平面上につくる。点 P, Q の x 座標が 0 から π まで動くとき、この正三角形が描く立体の体積を求めよ。



4．座標空間の$z\geqq 0$の部分に、底面がxy平面上の円$x^2+y^2\leqq r^2$（$0<r$）で表されているような立体がある。この立体のx軸に垂直な平面による切り口の面積はいつも正方形となっているという。この立体について、



(1) 平面$x=a$（$-r\leqq a\leqq r$）による切り口の面積は、[ア](r^2-a^2)で、この立体の体積は$\dfrac{[\ イ\ ]}{[\ ウ\ ]}r^3$である。

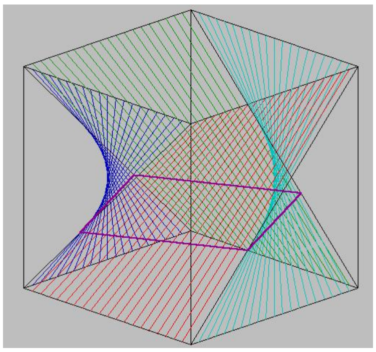
(2) $r=4$とする。平面$y=b$（$-4\leqq a\leqq 4$）による切り口上の点を（x,b,z）とする。このとき$|x|$のとりうる値の範囲は$0\leqq |x|\leqq\sqrt{[\ エ\ ]-b^2}$である。これを満たす$x$に対し$z$のとりうる値の範囲は

$0\leqq z\leqq [\ オ\ ]\sqrt{[\ エ\ ]-x^2}$である。平面$y=0$による切り口の面積は[カ]$\pi$、また$y=2\sqrt{3}$による切り口の面積は$\dfrac{[\ キ\ ]}{[\ ク\ ]}\pi+[\ ケ\ ]\sqrt{[\ コ\ ]}$である。

(3) $r=4$とする。$z=c$（$0<c<8$）による切り口の面積が$8(\pi+2)$であるとき、$c=[\ サ\ ]\sqrt{[\ シ\ ]}$である。

（近畿大）

5．右図のようにxyz空間に一辺の長さが1の立方体$DEFG-OABC$がある。2の動点P,QはそれぞれO,Eを同時に出発しPは正方形$OABC$上をこの順に一周し、QはPと同じ速さで正方形$EFGD$上をこの順に一周する。このとき線分PQが通過してできる曲面と正方形$OABC$、正方形$EFGD$によって囲まれる立体をVとする。

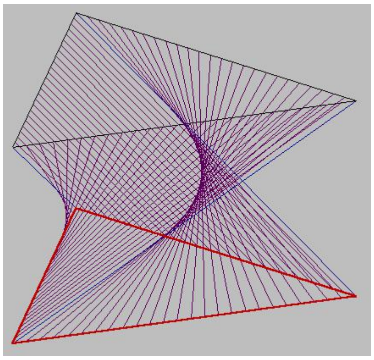


(1) $z=u$（$0\leqq u\leqq 1$）で切ったVの切り口はどんな図形か。またその切り口の面積を求めよ。

(2) Vの体積を求めよ。

（奈良教育大）

6．座標空間において、平面$z=1$上に一辺の長さが1の正三角形ABCがある。点A, B, Cから平面$z=0$におろした垂線の足をそれぞれD, E, Fとする。動点PはAから　Bの方向へ出発し、一定の速さで$\triangle ABC$の周上を一周する。動点Qは同時にEからFの方向へ出発し、Pと同じ一定の速さで$\triangle DEF$の周を一周する。線分PQが通過してできる曲面と$\triangle ABC$, $\triangle DEF$によって囲まれる立体をVとする。

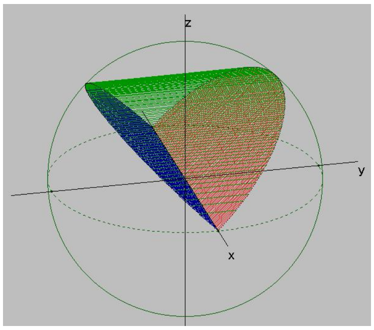


(1)　平面$z=a$（$0\leqq a\leqq 1$）によるVの切り口はどのような図形か。

(2)　Vの体積を求めよ。

（京都大）

7．空間内に、原点を中心とし半径rの上半球$S: x^2+y^2+z^2=r^2$, $z\geqq 0$がある。いま、平面$x=t$（$|x|\leqq r$）上に、正三角形PQRを考える。頂点Pはx軸上にあり、2頂点Q, RはS上にあって、辺QRがy軸に平行であるという。

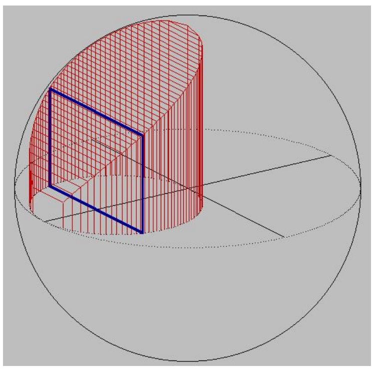


(1)　三角形PQRの面積をtを用いて表せ。

(2)　頂点PがSの直径上を動くとき、三角形PQRが動いてできる立体の体積を求めよ。

（千葉大）

8．球面$x^2+y^2+z^2=4$をSとし、平面$z=0$上の円$(x-1)^2+y^2=1$をCとする。点PがC上にあるときx軸に関してPと対称な点をQとする。さらに、Pを通りx軸に平行な直線、およびQを通りz軸に平行な直線が$z\geqq 0$の部分でSと交わる点をそれぞれP', Q'　とする。点Pが原点（0, 0, 0）から点（2, 0, 0）までC上を半周するとき、長方形$PQQ'P'$が通過する部分の体積を求めよ。



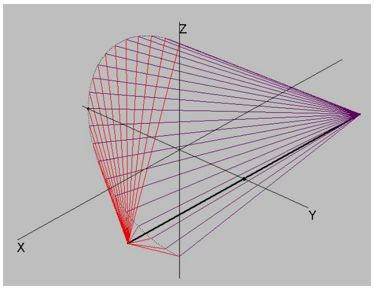
（慶応大）

9．xyz 空間内に定点 A（$1,1,0$），B（$-1,1,0$）がある。いま点 P が yz 平面上の半円 $x=0$，$x^2+y^2=2$，$y \leqq 0$ の上を動くとき、△PAB の周および内部の点でつくられる立体の K を考える。

(1) 平面 $x=t$ による K の切り口はどのような図形か。

(2) K の体積を求めよ。

（大阪大）



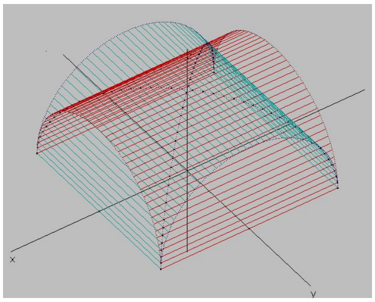
10. 空間内に４点 A（$1,1,0$），B（$-1,1,0$），C（$-1,-1,0$），D（$1,-1,0$）がある。

正方形 $ABCD$ を x 軸の回りに回転して得られる立体と、y 軸の回りに回転して得られる立体との和集合を W とする。

(1) W を平面 $z=\dfrac{1}{2}$ で切った切断面の面積 S を求めよ。

(2) W の体積 V を求めよ。

（日本大）

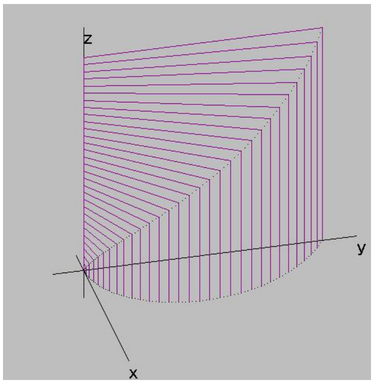


11. 座標空間内の４点（$0,0,0$），（$t\cos t, t\sin t, 0$），（$t\cos t, t\sin t, t$），（$0,0,t$）を頂点とする正方形を R_t とし、t が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化するとき R_t が描く立体を K とする。このとき次の問いに答えよ。

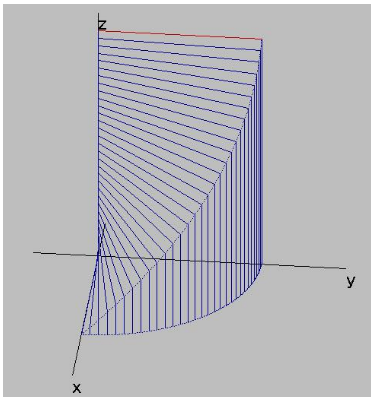
(1) K を平面 $z=\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で切ったときの切り口の面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

（九州芸術工科大）



12. xyz 空間の４点（$0,0,0$），（$\cos t,\sin t,0$），（$\cos t,\sin t,t$），（$0,0,t$）を頂点とする長方形を R_t とし、t が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化するとき、R_t が動いてできる立体を K とする。



(1) K を平面 $z=h$ $\left(0 \leqq h \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で切ったときの切り口の面積を求めよ。

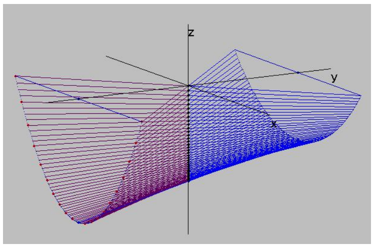
(2) K の体積を求めよ。

（東北大）

13. 空間において、２点 $P=(-t,-1,t^2-1)$，

$$Q=\left(t,1,\frac{e^t+e^{-t}}{2}-\frac{e+e^{-1}}{2}\right)$$

を考える。ただし $|t| \leqq 1$ とする。



$0<u<1$ である u に対して線分 PQ と平面 $y=u$ との交点を R=(x, y, z)とする。

(1) t を -1 から 1 まで動かすとき、x の動く範囲を u で表わせ。

(2) R の z 座標を x と u の式で表わせ。

(3) t を -1 から 1 まで動かすとき、線分 PQ が動いてできる図形と２平面 $y=1$，$z=0$ で囲まれる部分の体積を求めよ。

（東北大）

14. xyz 空間に５点、
$A(1,1,0)$，$B(-1,1,0)$，$C(-1,-1,0)$，
$D(1,-1,0)$，$P(0,0,3)$ をとる。四角すい $PABCD$ の
$x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

（東京大）