標準演習

整数問題を解く

§１　整数の離散性

１．n が1より大なる自然数のとき、$f(n)=n^2-n+1$ は平方数にならないことを示せ。

２．奇数の２乗は8で割ると1余ることを示せ。

３．$n>3$ とする。n と $n+2$ が共に素数のとき、$n+1$ は6の倍数であることを示せ。

４．2^n+1 と 2^n-1 が共に素数となる自然数 n をすべて求めよ。

（河合塾　京大オープン）

§２　等式変形

５．$xy+3x+2y+5=0$ を満たす整数の組（x,y）を全て求めよ。

（06 東京薬大）

６．$x^2-4y^2-2x=0$ を満たす整数の組（x,y）を全て求めよ。

７．自然数 n に対して、$\sqrt{n(n+5)}$ が整数になるとき、n は平方数であることを証明せよ。

（駿台　京大実践）

８．次の方程式をみたす整数の組（x,y）を全て求めよ。

(1)　$x^2+4xy+4y^2=9$

(2)　$x^2-2xy-3y^2=9$

(3)　$x^2-3xy+3y^2=9$

９．$2x^2+3xy-2y^2+x+7y=5$ を満たす整数の組（x,y）を全て求めよ。

10．$2x^2-xy+y+1=0$ を満たす自然数の組（x,y）を全て求めよ。

11．$a^3-b^3=217$ を満たす整数の組（a,b）をすべて求めよ。

（05 京都大(前) 理）

§３　絞り込み

12．$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ を満たす自然数の組（l,m,n）は全部で何組あるか。

13．n を正の整数とする実数 x,y,z に対する方程式 $x^n+y^n+z^n=xyz$ …①を考える。

(1)　$n=1$ のとき、①を満たす正の整数の組（x,y,z）で、$x\leqq y\leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2)　$n=3$ のとき、①を満たす正の整数の組（x,y,z）は存在しないことを示せ。

（０６　東京大(前) 文）

14. n, a, b, c, d は 0 または正の整数であって、

$$n^2-6=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$n \geqq a+b+c+d$$
$$a \geqq b \geqq c \geqq d$$

をみたす。 このような数の組（n, a, b, c, d）をすべて求めよ。

（80 東京大(文)）

15. n を正の整数とする。n^2+2 が $2n+1$ の倍数になる n を求めよ。

（92　一橋大(前)）

16. $x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz+2yz-5=0$ をみたす正の整数の組（x, y, z）をすべて求めよ。

（01 京都大(後) 理）

17. 正の整数 l, m, n が等式 $\dfrac{mn}{m+18}=l+\dfrac{1}{3}$ を満たしているとき、m は 3 の倍数であることを示せ。

18. 2 つの正の整数 m と n の最大公約数を G、最小公倍数を L とする。

$$\begin{cases}\log_3 L-\log_3 G=2+3\log_3 2\\ \log_2 L+\log_2 G=7+4\log_2 3\end{cases}$$

が成り立つとき、$G<m<n<L$ として、m, n を求めよ。

（01 慶応大(商)）

19. 自然数 m に対して、m の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする。たとえば $f(72)=6$ である。ただし $f(1)=1$ とする。m, n を自然数、d を m, n の最大公約数とするとき $f(d)f(mn)=f(m)f(n)$ となることを示せ。

（03 大阪大(前) 文）

§４　素因数分解の一意性

20. $7056=2^a3^b5^c7^d$ をみたす整数 a, b, c, d を求めよ。

（02 群馬大(前)）

21. p を自然数の定数とする。$2^m-2^n=2^p$ をみたす 0 以上の整数 m, n を p を用いて表せ。

22. $2^m n-2^{m-1}=1000$ が成り立つとき、正の整数 m, n を求めよ.

（04 甲南大(理工)）

23. 2 つ以上の連続する整数の和は 2^k の形にはならないことを証明せよ。

（04 滋賀大(前) 理）

24. $\sqrt{2}$ が無理数であることを、素因数分解の一意性を利用して証明せよ。

25. $m^2 = 2^m + 1$ を満足する正の整数 m , n の組をすべて求めよ。

（82　学習院大（経））

26. 自然数 a , b , c が $3a = b^3$, $5a = c^2$ を満たし、d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする。

(1) a は 3 と 5 で割り切れることを示せ。

(2) a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ。

(3) a を求めよ。

（06 東工大（後））

§５　規則性を探る

27. $\dfrac{2^n}{n} > n$ をみたす自然数 n の範囲を求めよ。

（79 京都大　文）

28. 正の整数の下 2 桁とは、100 の位以上の数字を無視した数をいう。たとえば 2000 , 12345 の下 2 桁はそれぞれ 0 , 45 である。m が正の整数全体を動くとき、$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

（07　東大文（前））

§６　余りで分類する

29. 2007^{2007} を 17 で割った余りを求めよ。

30. n を自然数とするとき、$3^{n+2} + 4^{2n+1}$ は 13 で割り切れるを示せ。

31. 今日は金曜日です。以下の問いに答えなさい。

(1) 10^6 日後は何曜日ですか。

(2) 10^{100} 日後は何曜日ですか。

(3) 3^{100} 日後は何曜日ですか。

（00 熊本県立大（前））

32. n^2 が 5 の倍数ならば, n は 5 の倍数であることを証明せよ。

33. 任意の整数 n に対し、$n^3 + 2n$ は 3 の倍数であることを示せ。

34. n を整数とするとき、$2n^3 - 3n^2 + n$ は 6 の倍数であることを示せ。

35. すべての自然数 n に対して、$\dfrac{n^5}{15} + \dfrac{n^4}{6} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{3} + \dfrac{n}{10}$ が自然数になることを示せ。

（01 宮城大）

36. 任意の整数nに対し、n^9-n^3は9で割り切れることを示せ。

（01 京都大(前) 文）

37. $x^2=5y+2$を満たす整数x, yは存在しないことを証明せよ。

（駿台東大実践）

38. nが3の倍数でない奇数のとき、n^2を12で割った余りを求めよ。

39. nは正の整数で、2でも3でも割り切れないとする。このとき、n^2-1は24で割り切れることを示せ。

（02 東京女大(文理)）

40. a, b, cはどの2つも1以外の共通な約数をもたない正の整数とする。a, b, cが、$a^2+b^2=c^2$をみたしているとき、次の問いに答えよ。

(1) cは奇数であることを証明せよ。

(2) a, bのうち、1つは3の倍数であることを証明せよ。

(3) a, bのうち、1つは4の倍数であることを証明せよ。

（04 旭川医大(後)）

41. 直角三角形の3辺の長さがすべて整数のとき、面積は2の整数倍であることを示せ。

（90 一橋大(前)）

42. 整数a, b, c, dが等式$a^2+b^2+c^2=d^2$をみたすとする。

(1) dが3の倍数でないならば、a, b, cの中に3の倍数がちょうど2つあることを示せ.

(2) dが2の倍数でも3の倍数でもないならば、a, b, cのうち少なくとも1つは6の倍数であることを示せ。

（94 一橋大(後)）

43. n, a, bを0以上の整数とする。a, bを未知数とする方程式

$$(*)\ a^2+b^2=2^n$$

を考える。

(1) $n \geqq 2$とする。a, bが方程式(*)を満たすならば、a, bはともに偶数であることを証明せよ(ただし0は偶数に含める)。

(2) 0以上の整数nに対して、方程式(*)を満たす0以上の整数の組(a, b)をすべて求めよ。

（04 京都大(前) 文）

§7 因数分解の効用

44. 全ての自然数nに対して、$10^n-(-1)^n$は11で割り切れることを示せ。

（01 津田塾大(英文)）

45. (1) すべての自然数nに対して4^n-1が3で割り切れることを示せ。

(2) 2^n+1が3で割り切れるような自然数nの満たすべき条件を求めよ。

(05 同志社大(法・工))

46. **kとmは正の整数とする。**

(1) mが奇数のとき、k^m+2^mは$k+2$で割り切れることを示せ。

(2) mが偶数のとき、k^m+2^mは$k+2$で割り切れれば、$k+2$は2^{m+1}の約数になることを示せ。

47. m, nは自然数で、$m<n$をみたすものとする。m^n+1, n^m+1がともに10の倍数となるm, nを1組与えよ。

(96 京都大(後) 理)

§８　二項定理の活用

48. (1) すべての自然数nに対して4^n-1が3で割り切れることを示せ。

(2) 2^n+1が3で割り切れるような自然数nの満たすべき条件を求めよ。

(05 同志社大(法・工))

49. 4^n-1が15の倍数となるようなnをすべて求めよ。

(08　大阪大(後)理)

50. 2^nを3で割った余りを求めよ。

51. 2^nを7で割ったときの余りが1であることの必要十分条件は、nが3の倍数であることを示せ.

(01 岡山県立大(中期))

52. (1) 正の整数nでn^3+1が3で割り切れるものを全て求めよ。

(2) 正の整数nでn^n+1が3で割り切れるものを全て求めよ。

(03 一橋大(前))

53. nを自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) nを3で割った余りが1ならば, すべての自然数mに対してn^mを3で割った余りは1であることを示せ。

(2) nを3で割った余りが2ならば､すべての奇数mに対してn^mを3で割った余りは2であることを示せ。

(3) n^mを3で割った余りが2となる自然数mがあれば､nを3で割った余りも2であることを示せ。

(07 お茶の水女大(前) 理)

54. 自然数nに対し、$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$とおく。このとき、

(1) S_nが6の倍数であるための条件を求めよ。

(2) S_nが12の倍数にならないことを示せ。

(03 奈良県立医大(前))

55. nを2以上の自然数とするとき、$n^4 + 4$は素数にはならないことを示せ。

(04 宮崎大(前))

§９ 素数の性質

56. $n^4 + n^2 + 1$が素数になるような自然数nを全て求めよ。

(06 玉川大(工))

57. $3p + 1$が平方数になるような素数pは$p = 5$のときに限ることを証明せよ。

58. 自然数x, yを用いて、$p^2 = x^3 + y^3$と表されるような素数pを全て求めよ。また、このときのx, yをすべて求めよ・。

(01 千葉大(後)理)

59. a, bは2以上の整数とする。

(1) $a^b - 1$が素数ならば、$a = 2$であり、bは素数であることを証明せよ。

(2) $a^b + 1$が素数ならば、$b = 2^c$（cは整数） と表せることを証明せよ。

(07 千葉大(後)理)

60. pを5以上の素数とするとき、$p^2 + 2$は必ず合成数になることを証明せよ。

61. 2以上の自然数nに対し、nと$n^2 + 2$がともに素数になるのは$n = 3$の場合に限ることを示せ。

(04 京都大(前)理)

62. nを自然数とする。n, $n + 2$, $n + 4$がいずれも素数であるのは$n = 3$の場合だけであることを示せ。

(04 早稲田大(政経))

63. (1) p, $2p + 1$, $4p + 1$がいずれも素数であるようなpをすべて求めよ。

(2) q, $2q + 1$, $4q - 1$, $6q - 1$, $8q + 1$がいずれも素数であるようなqをすべて求めよ。

(05 一橋大(後))

64. 整数$19^n + (-1)^{n-1} 2^{4n-3}$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）のすべてを割り切る素数を求めよ。

(86 東工大)

§１０　偶奇性・周期性

65. 各辺の長さが整数となる直角三角形がある。この直角三角形の内接円の半径は整数であることを示せ。

（02　お茶女大（後）理数）

66. a , b を整数とし、2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ を考える。この方程式の判別式 D が平方数ならであるならば、解は全て整数であることを示せ。

（06 津田塾大（数））

67. p , q を整数とし、$f(x)=x^2+px+q$ とおく。$f(1)$ も $f(2)$ も 2 で割り切れないとき、方程式 $f(x)=0$ は整数の解をもたないことを示せ。

68. n は正の整数で、2 でも 3 でも割り切れないとする。このとき、n^2-1 は 24 で割り切れることを示せ。

（02 東京女大（文理））

69. 正の整数の組（a , b）で a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし、$a<b$ とする。

（99 大阪大（前）文）

70. p , q を素数とする。このとき、$p+q$, $p-q$ も共に素数になるような p , q を求めよ。

（１３　京大プレ）

71. p は 3 以上の素数であり、x , y は $0 \leqq x \leqq p$,$0 \leqq y \leqq p$ を満たす整数であるとする。このとき、x^2 を $2p$ で割った余りと、y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ、$x=y$ であることを示せ。

（03 京大（前）文）

72. 2 つの奇数、a , b にたいして、$m=11a+b$, $n=3a+b$ とおく。つぎの(1), (2)を証明せよ。

(1) m , n の最大公約数は、a , b の最大公約数を d として、$2d$, $4d$, $8d$ のいずれかである。

(2) m , n はともに平方数であることはない（整数の 2 乗である数を平方数であるという）。

（89 京大（後）理）

73. kは0または正の整数とする。方程式$x^2-y^2=k$の解（a, b）で、a, bがともに奇数であるものを奇数解とよぶ。

(1) 方程式$x^2-y^2=k$が奇数解をもてば、kは8の倍数であることを示せ。

(2) 方程式$x^2-y^2=k$が奇数解をもつための必要十分条件を求めよ。

（92　京大(後)文）

74. 3^{1000}の1の位の数字を求めよ。

75. 7^{2007}の1の位の数字を求めよ。また、47^{2007}の1の位の数字も求めよ。

76. 2000^nを7で割った余りをa_nとし、$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$とおく。このとき、S_nが7で割り切れる最小のnを求めよ。

（00　同志社大(商)）

77. 整数nに対し、$f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$とおき、$a_n=i^{f(n)}$と定める。ただし、iは虚数単位を表す。このとき、$a_{n+k}=a_n$が任意の整数nに対して成り立つような正の整数kをすべて求めよ。

（01　京大(前)理）

78. nは0または正の整数とする。a_nを、$a_0=1$, $a_1=2$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$によって定める。a_nを3で割った余りをb_nとし、$c_n=b_0+b_1+\cdots+b_n$とおく。

(1) $b_0, b_1, \cdots, b_9$を求めよ。

(2) $c_{n+8}=c_n+c_7$であることを示せ。

(3) $n+1 \leqq c_n \leqq \dfrac{3}{2}(n+1)$が成り立つことを示せ。

（94　京大(前)理）

79. 整数からなる数列$\{a_n\}$を漸化式$a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n$（$n=1, 2, 3, \cdots$）のよって定める。

(1) a_nが偶数になることと、nが3の倍数になることとは同値であることを示せ。

(2) a_nが10の倍数になるための条件を(1)と同様の形式で求めよ。

（93　東京大(前)理）

§１１　互いに素

80. (1) a, bが互いに素であるとき、$a+b$, abは互いに素であることを示せ。

(2) a, bが互いに素であるとき、a^2+b^2, abは互いに素であることを示せ。

81. (1) 連続する 2 つの自然数は互いに素であることを示せ。

(2) 連続する 2 つの奇数は互いに素であることを示せ。

82. $n^3 - m^2 n + m^2 = 0$ をみたす整数 m , n は $m = n = 0$ に限ることを示せ。

83. a を 2 以上の自然数とするとき、a と $a^2 + 1$ は互いに素であることを示せ。

84. n は正の整数とする。x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とおく。

(1) 数列 a_n , b_n （$n = 1, 2, 3, \cdots$）は $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$ を満たすことを示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、a_n , b_n は共に正の整数で、互いに素であることを証明せよ。

（02　東京大(前)文理共通）

85. (1) 連続する 2 つの自然数の積は平方数にはならないことを示せ。

(2) 連続する 3 つの自然数の積は平方数にはならないことを示せ。

86. a, b, c はどの 2 つも互いに素な自然数で、$a^2 + b^2 = c^2$ をみたすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) a, b が共に奇数であるということはありえないことを証明せよ。

(2) a, b のうち偶数である方を d とする。このとき、$c + d$, $c - d$ は共に平方数であることを示せ。

87. 自然数 a , b , c について、等式 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立ち、かつ a , b は互いに素とする。このとき、次のことを証明せよ。

(1) a が奇数ならば、b は偶数であり、したがって c は奇数である。

(2) a が奇数のとき、$a + c = 2d^2$ となる自然数 d が存在する。

（９９　京都大(後)文）