No3　$y=x^2$を材料とした問題

１．放物線 $y=x^2$ に、点 P から 2 つの接線をひき、それらの交角が 60°であるように点 P が動くとき、点 P の軌跡を求めよ。

（1964　京都大）

２．放物線 $y=x^2$ がある。原点を通り傾き 1 の直線がこの放物線とふたたび交わる点を P_1 とし、次に P_1 を通り傾き $\frac{1}{2}$ の直線が放物線とふたたび交わる点を P_2, P_2 を通り傾き $\frac{1}{4}$ の直線が放物線とふたたび交わる点を P_3 とする。

このようにして $P_1, P_2, P_3, \cdots$を定め、一般に P_n を通り傾き 2^{-n} の直線が放物線とふたたび交わる点を P_{n+1} とする。P_n の座標を (x_n, y_n) とするとき、x_{2n+1} を求めよ。なお，点 $P_1, P_3, P_5, \cdots$はどのような点に近づくか。

（1965　大阪大）

３．放物線 $y=x^2$ の上に、2 点 A, B がある。 A, B の x 座標をそれぞれ $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ とする。この放物線上の任意の点 P の座標を (x, y) とするとき、$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を x の関数として表わし、この関数の増減、凹凸、極値、変曲点を調べて、グラフの概形を書け。

（1968　京都大）

４．放物線 $y=x^2$ 上に、2 定点 A, B がある。P は放物線上で A と B との間にある点で、放物線と弦 AP とで囲まれる図形の面積 S_1 と、放物線と弦 PB とで囲まれる図形の面積 S_2 との和が最小になるようにとった点である。

(1)　S_1 と S_2 の比を求めよ。

(2) 点 P での放物線の接線に垂直な直線と、A, B を通る直線とのなす角を求めよ。

（1972　北海道大）

５．長さ l の線分が、その両端を放物線 $y=x^2$ の上にのせて動く。この線分の中点 M が x 軸に最も近い場合の M の座標を求めよ。ただし $l \geqq 1$ とする。

（1974　東京大）

６． a と k は $a>0, k>1$ を満たす数とする。$y=x^2$ （x ≧ 0）で表される曲線をCとし、Cと $y=a$ の交点の x 座標を b とする。Cと $y=a, x=0$ で囲まれた部分の面積をS、Cと $y=a, x=kb$ で囲まれた部分の面積をTとする。SとTの大小関係を調べよ。

（1977　東北大）

７． 放物線 $y=x^2$ 上を動く点 P があって、時刻 $t=0$ のときの位置は原点である。また時刻 t のとき、P の速度ベクトルの x 成分は、$\sin t$ である。速度ベクトルの y 成分が最大となるときの P の位置を求めよ。また、そのときにおける P の速度ベクトルおよび加速度ベクトルを求めよ。

（1981　東北大）

８． 放物線 $y=x^2$ を C で表す。C 上の点 Q を通り、Q における C の接線に垂直な直線を、Q における C の法線という。$0 \leqq t \leqq 1$ とし、次の3条件をみたす点 P を考える。

(イ) C 上の点 $Q(t, t^2)$ における C の法線の上にある。

(ロ) 領域 $y \geqq x^2$ に含まれる。

(ハ) P と Q の距離は $(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$ である。.

t が 0 から 1 まで変化するとき、P の描く曲線を C’ とする。このとき、C と C’ とで囲まれた部分の面積を求めよ。

（1981　東京大）

９． xy 平面上の曲線 $y=x^2$ 上の 3 点を、x 座標の小さいものから順に A, B, C とする。A と B との x 座標の差は a（a は正の定数）、B と C との x 座標の差は 1 という関係を保ちながら 3 点 A, B, C が動く。

∠CAB が最大になるときの、点 A の x 座標を a で表わせ。また、∠CAB が最大になるときに、∠ABC が直角になるような a の値を求めよ。

（1982　東京大）

10. 単位円上の点 (a, b) $(a^2+b^2=1)$ から、放物線 $y=x^2$ へ異なる 2 本の接線が引けるとき、この 2 本の接線と $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を最大にしたい。このような点 (a, b) を求めよ。

（1987　東北大）

11. y 軸上の正の部分に中心をもち、放物線 $y=x^2$ と 2 点で接する円の列 $O_1, O_2, \cdots, O_n, \cdots$ を次の条件(1),(2)を満たすように定める。

(1) O_1 の半径は 1 である。

(2) $n \geqq 2$ のとき O_n は O_{n-1} に外接し、 O_n の中心の y 座標は O_{n-1} の中心の y 座標より大きい。
このとき、円 O_n の方程式を求めよ。

（1988　大阪大）

12. 放物線 $y=x^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面があり、y 軸が水平面に垂直で y 軸の正の部分が上方にあるように置いてある。その曲面の中に半径 r $\left(r>\frac{1}{2}\right)$ の球を落とし込む。このとき、この回転面と球面とで囲まれた部分の体積を求めよ。

（1989　京都大）

13. 放物線 $y=x^2$ の上の点 $P(t, t^2)$（ただし、$t>0$）でこの曲線に接し、かつ y 軸にも接する円を C_1, C_2 とし、それぞれの半径を r, R ($r<R$) とする。
(1) t が正の実数全体を動くとき、$\frac{R}{r}$ のとり得る値の範囲を求めよ。
(2) $\frac{R}{r}=2$ となる点 $P(t, t^2)$ を求めよ。

（1992　京都大）

14. 放物線の一部 $y=x^2$, $0 \leqq x \leqq 2$ を y 軸のまわりに回転してできる回転体型の容器に水を満たし、この中に、半径 r の鉛の球を、それが容器につかえて止るまでゆっくり沈めた。ただし、鉛直線を y 軸とする。このとき、次の問いに答えよ。
(1) もとの水面の高さから球の中心の高さを引いた差 S を r の関数として表せ。.
(2) あふれ出る水の体積を最大にする r の値を求めよ。

（1993　東京大）

15. xy 平面上で放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $A(a, a^2), B(b, b^2)$ ($a<b$) をとり、線分 AB と放物線で囲まれた図形の面積を s とする。点 $P(t, t^2)$ を放物線上にとり、三角形 ABP の面積を S(P)とする。t が $a<t<b$ の範囲を動くときの S(P) の最大値を S とするとき、s と S の比を求めよ。

（1998　京都大）

16. xy 平面上に放物線 $y=x^2$ と点 $B(0, b)$ を考える。ただし $b>0$ とする。
(1) 点 $X(t, t^2)$ がこの放物線上を動くとき、線分 BX の長さの最小値を求めよ。
(2) (1)で求めた最小値が 1 となるように b をとる。このとき点 $B(0, b)$ を中心とする半径 1 の円と放物線 $y=x^2$ とは相異なる 2 点 P, Q でそれぞれ共通の接線を持つことを示し、角 PBQ の大きさ（ただし $0° < \angle PBQ < 180°$ とする）を求めよ。さらに角　PBQ に対応する円弧 PQ と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ。

（1998　京都大）

17. 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,a^2)$ における法線が放物線 $y=x^2$ と再び交わる点を B とする。ただし、$a>0$ とする。

(1) 点 B の座標を、a を用いて表せ。

(2) $a=\dfrac{1}{2}$ とするとき、線分 AB と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とするとき、線分 AB と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

（1999　北海道大）

18. 曲線 $y=x^2$ の点 (a,a^2) での接線を l とする。 l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。 a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。

（1999　東北大）

19. C を $c>\dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。 xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし、直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き、点 Q が放物線 B 上を動くとき、線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。

（1999　東京大）

20. 放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって、この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき、PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。

（1999　京都大）

21. 曲線 $y=x^2$ （ $0\leqq x\leqq 1$ ）を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h 、体積を V とする。V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ で与えられる。

(1) 水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

（2003　北海道大）

22. xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件をみたしている。

$\triangle$PQR は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。.

このとき、 a の値を求めよ。

（2004　東京大）

23. a を 0 でない実数とする。放物線 C : $y=x^2$ 上の点で、点 A$(0, a)$ からの距離が最小の点を考える。

(1) このような点が 2 つ存在するための a の範囲を求めよ。

(2) a は(1)で求めた範囲にあるとし、A からの距離が最小の 2 点を P, Q とする。このとき線分 AP, 線分 AQ および放物線 C で囲まれる図形の面積を求めよ。

（2005　東北大）

24. 放物線 C : $y=x^2$ と 2 直線 $l_1 : y=px-1$, $l_2 : y=-x-p+4$ は 1 点で交わるという。このとき実数 p の値を求めよ。

（2006　京都大）

25. 座標平面上の 2 点 P,Q が、曲線 $y=x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ を自由に動くとき、線分 PQ を 1 : 2 に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし、P = Q のときは R = P とする。

(1) a を $-1 \leqq a \leqq 1$ をみたす実数とするとき、点 (a, b) が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。

（2007　東京大）

26 . xy 平面において、放物線 $y=x^2$ を C とする。
また、実数 k を与えたとき、$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1) $-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき、k の満たす条件を求めよ。

(2) k が(1)の条件を満たすとき、C と l および 2 直線 $x=-2$, $x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。

（2007　大阪大）

S

27. 放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で、h を表せ。

(2) L を固定したとき、h がとりうる値の最小値を求めよ。

（2008　東京大）

28. 放物線 C : $y = x^2$ 上の点 $A_1(a_1, a_1^2)$, $A_2(a_2, a_2^2)$, $A_3(a_3, a_3^2)$,･･･を、A_{k+2}（ $k \geqq 1$ ）における C の接線が直線 A_kA_{k+1} に平行であるようにとる。ただし、$a_1 < a_2$ とする。三角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}$ の面積を T_k とし、直線 A_1A_2 と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$ を S を用いて表せ。

（2009　大阪大）

29. a を正の実数とし、2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。
(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。
(2) 2 つの放物線 C_1 , C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。

（2010　北海道大）

30. 放物線 C : $y = x^2$ に対して、以下の問いに答えよ。
(1) C 上の点 $P(a, a^2)$ を通り、P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。
(2) l を(1)で求めた直線とする。$a \neq 0$ のとき、直線 $x = a$ を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。
(3) (2)で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し、F の座標を求めよ。

（2010　東北大）

31. 放物線 $y = x^2$ の 2 本の接線 l, m は垂直であるとする。
(1) l の接点の座標が (a, a^2) で与えられるとき、l, m の交点の座標を a を用いて表せ。
(2) l, m が y 軸に関して対称なとき、 l, m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

（2011　東北大）

32. 座標平面上の 1 点 $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ を、 3 点 P , Q , R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき、△PQR の重心 G (X , Y) の軌跡を求めよ。

（2011　東京大）

33. a を正の実数とし、$a \neq \frac{1}{2}$ とする。曲線 $C : y = x^2$ 上の 2 点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ と $Q(a, a^2)$ をとる。点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし、点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする。l と m の交点が C 上にあるとき、以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 2 直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ。

（2012　東北大）

34. 放物線 $C : y = x^2$ に対して、次の 2 つの条件を満たす直線 l が通る点の存在範囲を求めよ。

(a) C と l は異なる 2 点で交わる。

(b) C と l で囲まれた領域の面積は 36 である。

（2014　東北大）

解答

１．$\left(y+\dfrac{5}{12}\right)^2-\dfrac{x^2}{3}=\dfrac{1}{9}$

２．$x_{2n+1}=\dfrac{1}{3}\left\{2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$　　$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{9}\right)$

３．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	⌞	8	⌝	6	⌞	$\frac{37}{8}$	⌟

グラフ略

４．(1)　$1:1$　　(2)　90°

５．$\left(\pm\dfrac{\sqrt{l-1}}{2},\dfrac{2l-1}{4}\right)$

６．$1<k<\sqrt{3}$のとき$S>T$　　$k=\sqrt{3}$のとき$S=T$　　$k>\sqrt{3}$のとき$S<T$

７．位置　$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$　　速度ベクトル　　加速度ベクトル

８．$\dfrac{1}{3}$

９．点 A の x座標：$\dfrac{-2a-1}{4}$　　$a=\dfrac{3}{2}$

１０．$\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$

１１．$x^2+\left(y-n^2-\dfrac{1}{4}\right)^2=n^2$

１２．$\dfrac{\pi}{2}\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^3\left(r+\dfrac{1}{6}\right)$

１３．(1) $\frac{R}{r}>1$　(2) $\left(\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{32}\right)$

１４．(1) $0<r\leqq\frac{1}{2}$ のとき $s=4-r$，$\frac{1}{2}<r\leqq\frac{\sqrt{17}}{2}$ のとき $s=\frac{15}{4}-r^2$

$\frac{\sqrt{17}}{2}<r$ のとき $s=-\sqrt{r^2-4}$　(2) $r=\frac{2\sqrt{5}-1}{2}$

１５．4:3

１６．(1) $b\geqq\frac{1}{2}$ のとき $\frac{\sqrt{4b-1}}{2}$，$0<b\leqq\frac{1}{2}$ のとき b

(2) $\angle PBQ=120°$，面積 $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$

１７．(1) $\left(-a-\frac{1}{2a},a^2+\frac{1}{4a^2}+1\right)$　(2) $\frac{4}{3}$　(3)

１８．$\frac{10}{3}$

１９．$\sqrt{2}c-\frac{\sqrt{2}}{4}$

２０．$y=x^2+\frac{\sqrt[3]{36}}{4}$

２１．(1) $\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$　(2) $T=\frac{2\pi}{3}$

２２．$\frac{18}{5}$

２３．(1) $a>\frac{1}{2}$　(2)

２４．$p=2,\pm\sqrt{13}$

２５．略

２６．(1) $-\dfrac{1}{4}<k<2$ (2) $\dfrac{16}{3}-4k+\dfrac{1}{3}(1+4k)^{\frac{3}{2}}$

２７．(1) $h=\dfrac{m^2(m^{3\backslash 2}+1)+L^2}{4(m^2+1)}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{L^2}{4} & (0<L\leqq 1) \\ \dfrac{2L-1}{4} & (1<L) \end{cases}$

２８．(1) $\dfrac{1}{8}$ (2) $\dfrac{6S}{7}$

２９．(1) $y=(2-2a)x-(a-2)^2$ (2) $\dfrac{2a^3}{3}$

３０．(1) $y=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$ （$a\neq 0$） $x=0$ （$a=0$）

(2) $y=\left(a-\dfrac{1}{4a}\right)x+\dfrac{1}{4}$ (3) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$

３１．(1) $\left(\dfrac{4a^2-1}{8a},-\dfrac{1}{4}\right)$ (2) $\dfrac{1}{12}$

３２．$y=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{x-\frac{1}{6}}-\dfrac{1}{12}$ の $\dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{2}$ の部分

３３．(1) $a=1$ (2) $\dfrac{17}{24}$

３４．$y\leqq x^2+9$