1971 年

東京大学　数学入試問題

１. 変数 t が 0 から π まで動くとき $x=2\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right),\ y=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)$ によって表される点(x,y)と原点$(0,0)$との間の距離の最大値，最小値およびそれらをとる t の値を求めよ。

２. 正数 x を与えて、$2a_1=x$, $2a_2={a_1}^2+1$, … , $2a_{n+1}={a_n}^2+1$, … のように数列$\{a_n\}$を定めるとき

(1) $x\neq 2$ ならば、$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ となることを証明せよ。

(2) $x<2$ ならば、$a_n<1$ となることを証明せよ。このとき、正数 ε を$1-\dfrac{x}{2}$より小となるようにとって、a_1 , a_2 , … , a_n までが $1-\varepsilon$ 以下となったとすれば、個数 n について次の不等式が成り立つことを証明せよ

$$2-x>n\varepsilon^2$$

３. 与えられた実数係数の整式 $f(x)$について $\int_0^1 f(x)\,dx=2$, $\int_0^1 xf(x)\,dx=3$ となるとする。

そのとき、$\int_0^1\{f(x)-ax-b\}^2\,dx$ の値を最小にする実数 a および b の値を求めよ。

４. x の整式 $f_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ （$n=1,2,\cdots$）

について $f_n'(x)=f_{n-1}(x)$（$n=2,3,\cdots$）が成り立つことを証明せよ。

　方程式 $f_n(x)=0$ は、n が奇数ならばただ 1 つの実数解をもち、n が偶数ならば実数解をもたないことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

５. n を正の整数とし、$\left(\cos\dfrac{2\pi}{n}k,\ \sin\dfrac{2\pi}{n}k\right)$を座標とする点を Q_k で表す。このとき、n 個の点 Q_0 , Q_1 , Q_2 , … , Q_{n-1} によって円周 $x^2+y^2=1$ は n 等分される。平面上の点 P の座標を(a,b)とし、

$S_n=\dfrac{1}{n}\left(\overline{\mathrm{PQ}_0}^2+\overline{\mathrm{PQ}_1}^2+\cdots+\overline{\mathrm{PQ}_{n-1}}^2\right)$ とするとき、$\lambda_{\mathrm{P}}=\lim_{n\to\infty}S_n$ の値を a , b を用いて表せ。また、P がどこにあれば、λ_{P} の値は最小となるか。

６．3 人で‘ジャンケン’をして勝者をきめることにする。たとえば、1 人が‘紙’を出し、他の 2 人が‘石’を出せば、ただ 1 回でちょうど 1 人の勝者がきまることになる。3 人で‘ジャンケン’をして、負けた人は次の回に参加しないことにして、ちょうど 1 人の勝者がきまるまで、‘ジャンケン’をくり返すことにする。このとき、k 回目に、はじめてちょうど 1 人の勝者がきまる確率を求めよ。