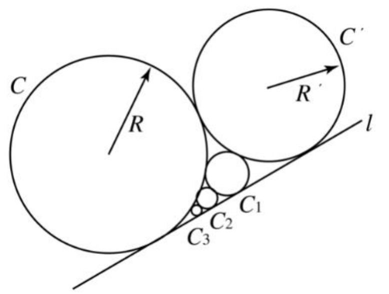
1972 年	東京大学　数学入試問題

１．空間に座標系が定められていて、z 軸上に 2 点 A(0 , 0 , 6) , B(0 , 0 , 20)が与えられている。xy 平面上の点 P(x , y , 0)で、$0 \leqq x \leqq 15$, $0 \leqq y \leqq 15$, $\angle \mathrm{APB} \geqq 30^\circ$を満たすもの の全体が作る図形の面積を求めよ。

２．平面上の三角形 ABC において、頂点 A を通り、辺 AB , AC に垂直な直線をそれぞれ h , k とする。B の k に関する対称点を B' , C の h に関する対称点を C ' とする。$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \vec{b}' = \overrightarrow{\mathrm{AB'}}, \vec{c}' = \overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ の間に $\vec{b}' = \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}' = m\vec{b} + \vec{c}$（$m$ は正の整数）, $|\vec{b}| = 1$ が成り立つとき、m , $\angle \mathrm{BAC}$, および$|\vec{c}|$を求めよ。ただし$|\vec{a}|$は$\vec{a}$の長さを表す。
また $0 < \angle \mathrm{BAC} < \pi$ とする。

３．互いに外接する定円 C , C' が共通接線 l の同じ側にあるとする。図のように C , C' , l に接する円を C_1， C , C_1 , l に接する円を C_2， … C , C_{n-1} , l に接する円を C_n， … とする。このとき円 C_n の半径を r_n として、極限値 $\lim_{n \to \infty} n^2 r_n$ を、円 C の半径 R と円 C' の半径 R' とを用いて表せ。



４．k を実数の定数, $f(x) = x^2(x+8)$, $g(x) = (x^2 - 1)(x+4)$とするとき、x に関する方程式 $f(x) - kg(x) = 0$ の相異なる実数解の個数を求めよ。

５．$h(x)$ は$-\infty < x < \infty$で 2 回微分可能なある関数で、$f(x)$がどのような一次関数であっても、$u(x) = \int_0^x h(t)f(t)\,dt + h(x)\int_x^1 f(t)\,dt$ とおけば、

(1) $\dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x)$　および

(2) $u(0) = 0$ が成り立つ。

このとき、$h(x)$を求めよ。

６．図の長方形 ABP_1P_5 はある国境の町を表し、各線分は道路を表す。図の地点 $P_1, P_2, \cdots, P_9$ には外国への通路が開かれている。いま、ある犯人が B から外国に向って逃走しようとしているが、この犯人は P_j（$1 \leqq j \leqq 9$）以外の各交差点（B を含む）において、確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつで真東または北東に通路を選ぶ。この犯人を捕えるために 3 人の警官を P_j（$1 \leqq j \leqq 9$）のうちの適当な 3 地点に配置しようとする。どの 3 点に配置すれば、犯人を捕える確率 p が最大となるか。また、そのときの p の最大値を小数第 2 位まで求めよ。ただし、犯人は警官に出会わないで国境の地点に達すれば、無事に逃げおおせるものとする。