2025 年	# 東京大学　数学入試問題	

★理科★

【１】座標平面上の点 A(0 , 0) , B(0 , 1) , C(1 , 1) , D(1 , 0)を考える。実数 $0<t<a$ に対して、線分 AB , BC , CD を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t , Q_t , R_t とし、線分 P_tQ_t , Q_tR_t を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t , T_t とする。さらに、線分 S_tT_t を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とする。また、点 A を U_0 , 点 D を U_1 とする。

(1) 点 U_t の座標を求めよ。

(2) t が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と、線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) a を $0<a<1$ を満たす実数とする。t が $0\leqq t\leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを、a の多項式の形で求めよ。

【２】(1) $x>0$ のとき、不等式 $\log x\leqq x-1$を示せ。

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$$

【３】平行四辺形 ABCD において、∠ABC =$\angle ABC=\frac{\pi}{6}$, AB = a , BC = b , $a\ \leqq\ b$ とする。次の条件を満たす長方形 EFGH を考え、その面積を S とする。

条件：点 A , B , C , D はそれぞれ辺 EF , FG , GH , HE 上にある。

ただし、辺はその両端の点も含むものとする。

(1) ∠BCG = θ とするとき、S を a , b , θ を用いて表せ。

(2) S のとりうる値の最大値を a , b を用いて表せ。

【４】この問いでは、0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ。a を正の整数とし、$f_a(x)=x^2+x-a$とおく。

(1) n を正の整数とする。$f_a(n)$が平方数ならば、$n\leqq a$ であることを示せ。

(2) $f_a(n)$が平方数となる正の整数の個数を N_a とおく。次の条件(i) , (ii)が同値であることを示せ。

(i) $N_a=1$ である

(ii) $4a+1$は素数である。

【5】n を 2 以上の整数とする。1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり、横一列におかれている。1 以上$(n-1)$以下の整数に対して、次の操作(T_i)を考える。

(T_i) 左から i 番目の札の数字が、左から$(i+1)$番目の札の数字よりも大きければ、これら枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ、札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から、$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ であったとする。この状態から$(n-1)$ 回の操作$(\mathrm{T}_1), (\mathrm{T}_2), \cdots, (\mathrm{T}_{n-1})$を順に行った後、続けて $(n-1)$ 回の操作$(\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_2), (\mathrm{T}_1)$を順に行ったところ、札の数字は左から $1, 2, \cdots, n$ と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

(1) A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。

(2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ の総数を c_n とする。n が 4 以上の整数であるとき、c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ。

【6】複素数平面上の点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の複素数 z に対し、$\frac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ。

(2) α, β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき、$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3) γ を(2)で求めた範囲に属さない複素数とするとき、$\frac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

★文科★

【1】a を正の実数とする。座標平面において、放物線 C：$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ における C の接線と直交し、P を通る直線を l とおく。l と C の交点のうち、P と異なる点を Q とおく。

(1) Q の x 座標を求めよ。

Q における C の接線と直交し、Q を通る直線を m とおく。m と C の交点のうち、Q と異なる点を R とおく。

(2) a がすべての正の実数を動くとき、R の x 座標の最小値を求めよ。

【2】平面上で AB = AC = 1 である二等辺三角形 ABC を考える。正の実数 r に対し、A , B , C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つを合わせた領域を D_r とする。ただし、この問いでは、三角形と円は周とその内部からなるものとする。辺 AB , AC , BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s, 三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す。

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$ のとき、s と t を求めよ。

(2) $\angle\mathrm{BAC}=\frac{2\pi}{3}$ のとき、s と t を求めよ。

(3) $0<\theta<\pi$ を満たすに対して、$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ のとき、s と t を θ を用いて表せ。

【3】白玉2個が横に並んでいる。投げたとき表と裏のでる確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$のコインを用いて、次の手順(＊)をくり返し、白玉または黒玉を横一列に並べていく。

手順(＊)コインを投げ、表がでたら白玉，裏がでたら黒玉を、それまでに並べられている一番右にある玉の右隣におく。そして、新しくおいた玉の色がその1つ左の玉の色と異なり、かつ2つ左の玉の色と一致するときには、新しくおいた玉の1つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる。

例えば、手順(＊)を2回行いコインが裏，表の順にでた場合には、白玉が4つ並ぶ。正の整数nに対して、手順(＊)をn回行った時点での$(n+2)$個の玉の並び方を考える。

(1) $n=3$のとき、右から2番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(2) nを正の整数とする。右から2番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(3) nを正の整数とする。右から1番目と2番目の玉がともに白玉である確率を求めよ。

【4】aを実数とする。座標平面において、次の連立不等式の表す領域の面積を$S(a)$とする。

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+2 \\ y \geqq |x^2+a| \\ -1 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

aが$-2 \leqq a \leqq 2$の範囲を動くとき、$S(a)$の最大値を求めよ。